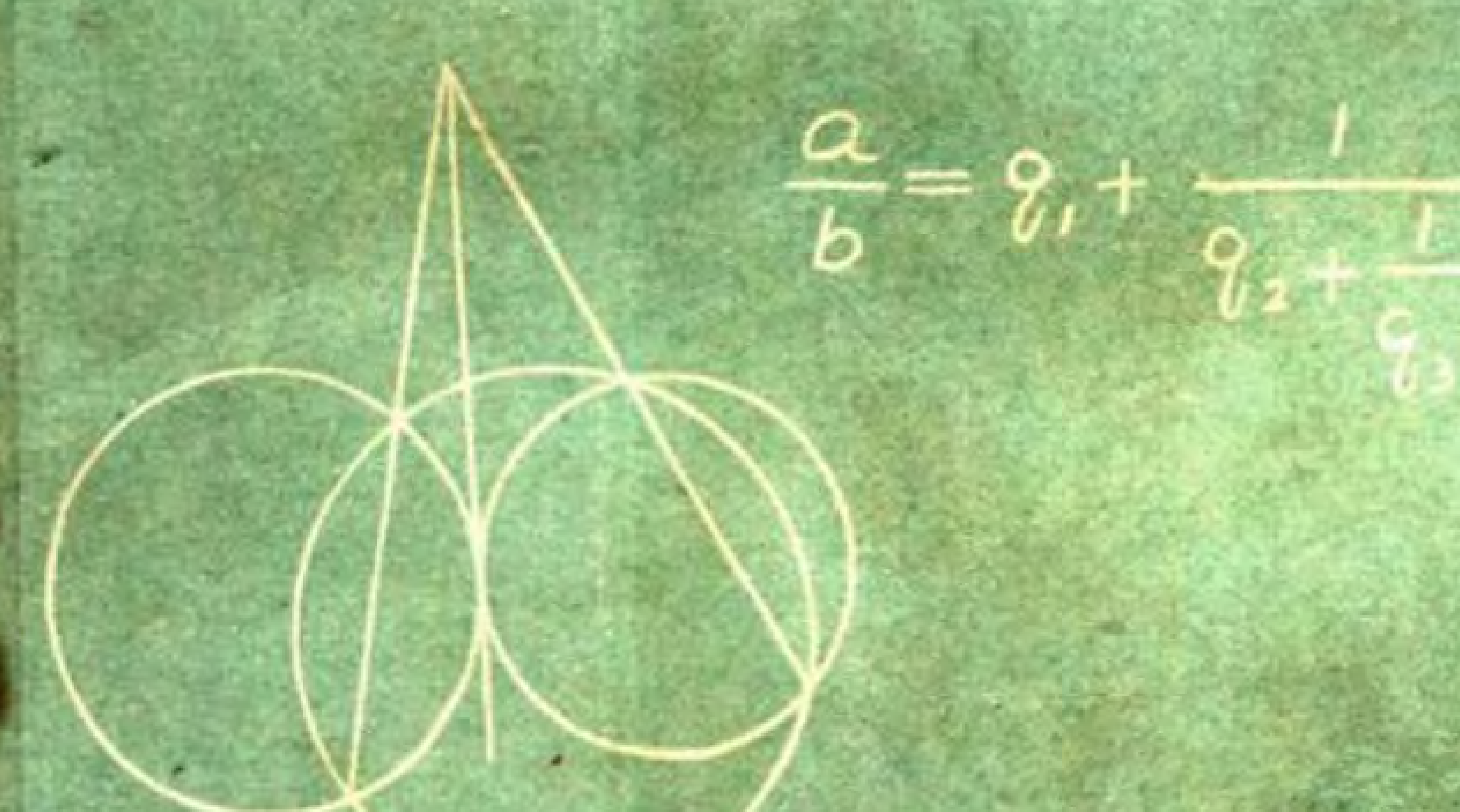
青年数学叢書

几何学中的証明

菲齐索夫 著







中国青年出版社

青年数学叢書

几何学中的証明

菲齐索夫 著
力 人 譯

中国青年出版社
1958年·北京

內 容 提 要

这本小册子可以帮助初学几何的中学同学理解几何学中的証明，糾正一些容易产生的錯誤看法。它告訴讀者，什么是証明？为什么必須証明？証明应該是怎样的？几何学中有哪些命題可以不加証明地采用？說理淺显而透徹，文字也很生动。書里列举了很多日常碰到的关于平面几何的例子来說明問題，并不涉及高深的数学理論，只要具有平面几何学的初步知識，便能閱讀。

А. И. ФЕТИСОВ

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ

В ГЕОМЕТРИИ

ТЕХГИЗ, МОСКВА, 1954

目　　次

前　言

有一回，正是新学年剛开始的时候，我偶然听到了兩位姑娘的談話．她們里面大些的一位才升到六年級，小些的一位才升到五年級．她們在交談关于功課、老师和同学的印象，关于新学科的印象．那位六年級同学对于几何課[1]感到很詫异，她說：“真奇怪，老师走进教室，在黑板上画了兩个相等的三角形，随后整堂課就向我們証明，它們是全等的．我怎么也不明白，这有什么必要呢？”小些的那位姑娘問道：“那末你怎么做习題呢？”“照着教科書讀熟唄……只是什么地方該安上什么字母，記起来实在困难……”

就在那天傍晚，我听到这位姑娘坐在窗口，孜孜不倦地在复习几何：“为了証明，我們把三角形 $A'B'C'$ 放在三角形 ABC 上面……把三角形 $A'B'C'$ 放在三角形 ABC 上面……”她一遍又一遍地重复着．可惜我沒有能知道这位姑娘几何学得怎样；但是可以想象，她对这門功課学起来是相当困难的．

过了几天，我同宅的鄰居多列到我这儿来，他也是六年級学生，并且也在抱怨几何．在課堂上老师向他們講解了这样一条定理：三角形的任意一个外角，大于和它不相鄰的任意一

[1] 苏联学校六年級相当于我国的初中二年級．——譯者注

个內角（內对角）；并且要他們回家来好好掌握它。多列指給我看吉西略夫編的課本上的图（图 1），問道："这張图上不是很明显嗎，三角形的外角是鈍角，而內对角是銳角，为什么还要作这又長又复杂的証明呢？鈍角本来就比銳角大，这是很明显的，用不到作什么証明。"多列在尽力說服我。于是我只得向他解釋，这个命題完全不这样明显，完全有理由要求証明这个关于三角形外角的命題。

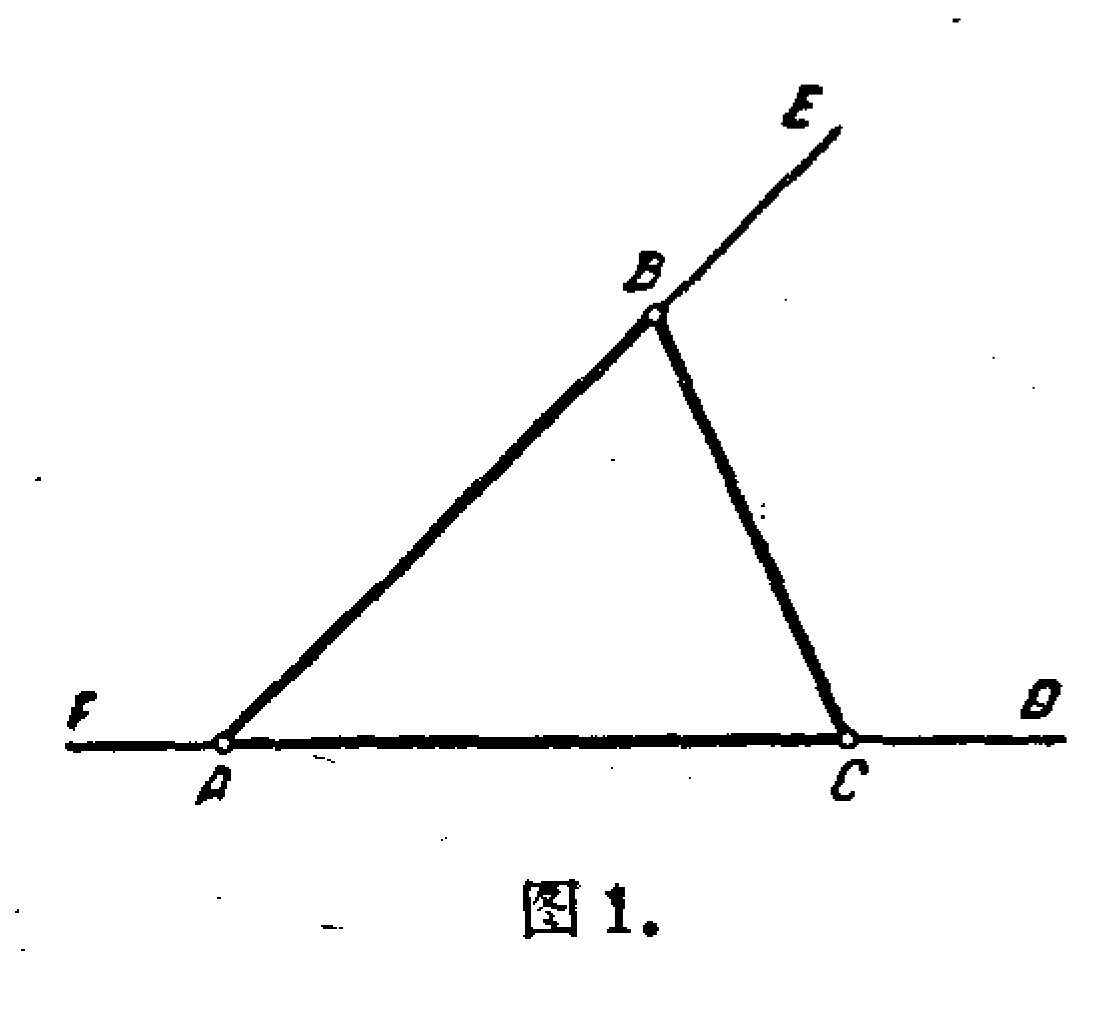


图 1.

最后，就在不久以前，有一位八年級①的同学拿他的課卷給我看，照他的話說，是老师"不公平地"少打了他的分数。他提出来的那道題是：已知一等腰梯形，上下底各長 9 和 25 厘米，腰長 17 厘米，求梯形的高。为解这道題，他作了梯形的內切圓，并且指出，根据外切四边形的定理（外切四边形兩組对边的和相等），在这个梯形里是可以作一个內切圓的（$9+25=17+17$）。然后，高就由这个梯形的內切圓的直徑确定，它等于梯形上下底的比例中項（这条定理已經在以前的一次作业里証明过了）。

解答显得十分簡單而且令人信服，但是老师却着重指出，引用关于外切四边形的定理这一步做得不对。这位八年級同

① 苏联学校八年級相当于我国的高中一年級。——譯者注

学摸不淸头腦了．“外切四边形兩組对边的和相等，这难道还有不对嗎？我們的梯形上下兩底的和恰好等于兩腰的和——可見，在这个梯形里是可以作一个內切圓的．究竟錯在什么地方呢？”他問道．

象我剛才說的这种事例可以举出很多．同学們常常弄不明白，有什么必要来証明这些不用証明就很明显的眞理，証明有时候也显得过分复杂而冗長．往往还有这样的情形，看来似乎是明确而令人信服的証明，在严格审查以后，发現原来是錯的．

这本小册子是为了帮助同学們了解下面这些問題而写的：

(一)什么是証明？

(二)为什么必須証明？

(三)証明应該是怎样的？

(四)几何学的哪些命題可以不加証明地采用？

一　什么是証明？

1．那末，我們就来自問，究竟什么是証明呢？設想一下，如果你要想使跟你談話的人相信地球是球形的；那末，你就得告訴他地平綫会随着地面上观察者升高的程度而扩展开去，告訴他关于环球旅行，告訴他在月食时地球投射在月球上的陰影是圓的，等等．

上述你希望用来使你对方信服的每一件事，叫做証明的

一个論据；所有这些論据的总和，就叫做**論証**。論据的力量或說服力建立在什么基础上呢？作为例子，我們来分析一下上述論据的最后一个。我們确信地球一定是球形的，因为它的阴影是圓的。我們确立这个論断，是由于从亲身經驗知道：一切球形物体都投下圓形的阴影，反过来說，从各个位置都投下圓形阴影的物体一定是球形的。因而，在这情况下我們首先根据事实，根据我們直接的生活經驗，这些經驗就是証实我們周圍物質世界里的物体性質的凭据。然后才采用推理的方法，比如在这情况下推理是按下列次序进行的。

"凡是从各个方向都投下圓形阴影的物体必定是球形的。""在月食时地球处在月球的不同位置，但总是投下圓形的阴影。"于是得到結論："因此，地球是球形的。"

我們来举一个物理学上的例子。十九世紀六十年代，英国物理学家麦克斯韋确定，电磁振蕩以光速在空間傳播。这情况促使他提出光也是电磁振蕩的假設(假說)。为了証明这个假設的正确性，必須确定，光和电磁波相似的地方不限于它們有相同的傳播速度这一点；必須引用足够有力的論据来証明这兩种現象的共同性質。一些实驗的結果就是这样的論据，在这些实驗里观察到了电磁場对于各种不同光源发出的光的輻射性質都有明显的影响。还观察到共他一系列的事实，这些事实有力地指出，光和电磁波具有同样的性質。

再举一个算术上的例子。任意取一些奇数，各自平方，再从得到的各个平方数减去一。例如：

$$7^2-1=48;\ 11^2-1=120;\ 5^2-1=24;$$

$$9^2-1=80;\ 15^2-1=224$$

等等．研究一下得到的数，我們发現它們有一个共同的性質：它們每一个都能被8整除．用其他的奇数再进行几次嘗試，也导致同样的結果，我們就提出假設："一切奇数的平方減去一，得到的数是8的倍数．"

因为現在我們所說的是一切奇数，所以我們必須引用对于任何奇数都合用的論据．考慮到这一点，我們想到，任何奇数有 $2n-1$ 的形式，这里 n 是任意的自然数．奇数的平方減去一可以写成这样的表示式：$(2n-1)^2-1$．脫去括弧就得到：$(2n-1)^2-1=4n^2-4n+1-1=4n^2-4n=4n(n-1)$．

得到的式子在 n 等于任意自然数时都能被8整除．事实上，乘数四表示数 $4n(n-1)$ 能被4整除．此外，$n-1$ 和 n 是兩个連續的自然数；里面必定有一个偶数；因而我們的式子必定还含有一个因数2．

所以，数 $4n(n-1)$ 永远能被8整除，这就是要証明的．

从这些例子，我們可以知道我們認識周圍世界以及它的物体、現象和規律性的基本方法．第一种方法是：根据对物体和現象所作的大量观察和实驗，揭示出它們的普遍規律性．从我們引用的例子可以看出，人們根据观察确定了物体的形狀和它的阴影之間的关系；多次的观察和实驗証实了光的电磁本質；最后，我們对奇数的平方数进行的研究能够确定这些平方数減去一以后的性質．从大量特殊情况的研究得出普遍的結論，这种方法叫做**归納法**．

当我們已經知道了某些普遍規律，把这些知識应用到特

殊情况中去，这时候我們引用的是另一种方法．这种方法叫做演繹法．在最后一个例子里，我們就是这样把算术的普遍規律运用到特殊情况，也就是用来証明任何奇数存在某种性質．

这个例子向我們指出，归納法和演繹法是不能互相脫离的．归納和演繹的統一性，是科学思維的特征．

不难察觉，在所有証明的过程中我們都运用了这兩种方法．当我們为証明某一个命題而寻找論据的时候，我們就轉向实驗、观察、事实，或者轉向那些已經証明是可靠的命題．根据这些到手的資料，我們再对这个要証明的命題的肯定或否定进行推理．

2．我們还是回到几何学上来．几何学研究物質世界的空間的性質．我們把决定物体的形狀、大小和相互位置的这种性質叫做“空間的”性質．显然，認識这些性質的必要性是和人們实踐的需要相联系的：人們为了制造机器、建筑房屋、修路、开运河等等，必須測量長度、面积和体积．当然，最初的几何知識是从大量的观察和实驗中用归納方法得到的．但是，随着几何学眞理的积累，发現其中有不少可以靠推理从另一些眞理得到，也就是用演繹法得到，不必再用專門的实驗．

比如說，多次的观察和实驗使我們相信，“通过兩点，可以而且只可以作一条直綫．”根据这条眞理，不用任何实驗，我們就可以确信，“兩条不同的直綫不能有一个以上的交点．”这条新的眞理通过十分簡單的推論就得到了．实际上，如果我們假設兩条不同的直綫能有兩个交点，那末从这里我們应該作

出結論：通过兩点可以引兩条不同的直綫；这是和前面已經确立的眞理相抵触的。

人們的实踐活动导致发現大量几何学眞理，它們反映出我們对物質世界的空間形体的認識。仔細研究这些眞理，发現其中有一些可以从另一些通过邏輯推理的方法得到。这就导致这样的想法：从所有几何学眞理中把最簡單、最普遍的部分划分出来，这部分用不着証明就可以应用；其余的几何学的性質和关系就从这些基本眞理用演繹法推导出来。

这样的想法古希腊的几何学家就已經产生了，他們开始使他們所知道的几何学眞理系統化起来，把它們从比較少的基本命題推导出来。紀元前 300 年，希腊亞历山大里亞的几何学家欧几里得提出了在当时最完整的几何学系統的叙述。在这叙述中，一些不必証明就可采用的命題划分开来了，这就是所謂**公理**。其余正确性要靠証明显露出来的命題，开始叫做**定理**。

欧几里得几何学体系已經存在了二千多年，甚至現在学校里的几何学叙述在很多部分还反映出欧几里得的影响。这样，在几何学体系里，我們就有了比較少数的基本眞理——公理，它們用归納法得到，不必証明就可以采用；而其余的几何学眞理靠演繹推理从公理导出。所以几何学基本上是一門演繹的科学。

現在很多几何学家的工作是在設法揭示出所有对于建立几何学体系必不可少的公理，并且尽可能地減少公理的条数。这方面的工作还在上个世紀就开始了，虽然已經做了很多，但

是直到現在也还不能認为这項工作已經做得十分完美了.

这样，总結本节的全部說明，我們現在可以回答这个問題了：究竟什么是几何学上的証明呢？正象我們看到的，証明就是推理的系統，要証明命題的正确性就应該用推理方法从公理和以前証明了的眞理推导出来.

下面再回答一个問題：用演繹推理得到的命題，它的正确性是拿什么来保証的呢？在演繹推理时，我們把某些普遍規律运用到特殊情况，因为十分明显，所有一般地总是正确的东西对于每个个別情况也將是正确的. 这就保証了演繹推理的正确性.

例如，假使我說，任何三角形三个內角的和等于180°，几何图形 ABC 是一个三角形，那末，毫无疑問：$\angle A+\angle B+\angle C=180°$. 仔細地研究几何学，就不难确信，我們对于推理每一步都是这样考慮的.

二　为什么必須証明？

1. 現在我們来設法回答第二个問題："为什么必須証明？"

証明的必要性是由于邏輯学（邏輯学是一門关于正确思維的規律的科学）的基本規律之一——**充足理由律**的結果. 这个規律包含这样的要求：要求我們提出的任何論断是有根据的，也就是說，要使得論断帶足够有力的論据，来証实我們的論断的正确性以及它跟事实和实踐的一致性. 这样的論据

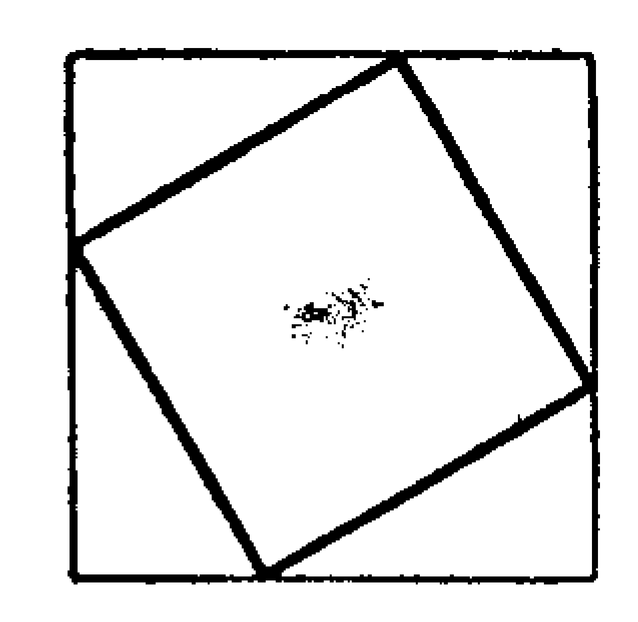
可以是能够用观察和实验方法来驗証的指示，也可以是含有推理系統的結構正确的討論。

在数学上和我們有关的主要是后一种論据。

証明几何学命題的目的就是，要从已經証明的或人所共知的眞理，用邏輯推理来确定这命題的可靠性。

但是，这里終究发生問題了：假使要証明的命題不加証明就足够清楚了，那末是不是还值得証明呢？

例如中世紀的印度数学家們就贊成这样的观点。有很多几何学命題，他們并沒有証明，却对它們繪制了充分达意的图，图下就写了“你看！”一句話。比如說，印度数学家巴斯卡拉·阿查里雅著的“利拉瓦底”一書里的勾股弦定理就是这样（图2）。讀者应該从这兩張图“看出”，直角三角形在兩条直角边上作成的正方形面积的和等于斜边作成的正方形的面积。



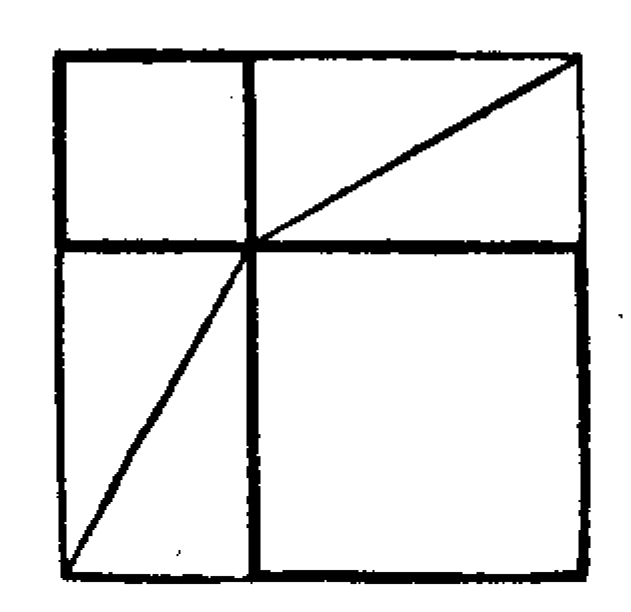


图 2.

能不能說，在这情况下沒有証明呢？当然不能！假使讀者只是看着图而不加思索，恐怕他就得不到什么結論。事实上，这位著者是假定讀者不仅看图，而且还进行思考的。讀者应該明白，眼面前画着的是兩个面积相等的正方形。第一个正方形是由四个全等的直角三角形和它們的斜边圍成的一个正方形構成的，第二个正方形是由同样的四个直角三角形和在直角边上作成的兩个正方形構成的。剩下的只要考虑到，如果从等量（兩个相等的大正方

形的面积)减去等量(四个直角三角形的面积),那末我們剩下的也是等量:第一个正方形里三角形斜边圍成的正方形的面积和第二个正方形里在直角边上作成的兩个正方形面积的和相等。我們可以看到,在这里單靠眼睛看是完全不够的,还需要思考和判断。

但是,也許几何学里真会有这样的定理吧,它确实显而易見,可以不用作什么思考?

这里首先应該指出,在精密科学里一貫靠"显而易見"是不可以的,因为"显而易見"这个概念是非常模糊和不可靠的:有些事对某一个人是十分显而易見的,而另一个人却感到非常可疑。只要想一想,亲眼看見某一件事的人們在描述这件事时是多么不一致,根据所謂"見証人的供詞"来确立真理有时候是多么困难,你就明白了。

可以举一个有趣的几何学例子,来說明我們是会被表面上的"显而易見"含糊騙过的。这个例子是这样的:我拿一張紙,在上面画一条連續的閉綫;然后我用剪刀沿这条綫把紙剪开。要問:割縫的兩端碰头以后,这張紙怎样了呢?恐怕你們大多数人会不加思索地回答:这張紙分成單独的兩片了。但是,这个回答可能是不正确的。我們且来做一个这样的实驗:取一条紙帶,先把帶的一端翻过来,然后把它粘合成环形。結果我們得到了所謂"**謀比烏斯帶**"(图3)。(謀比烏斯是德国数学家,他研究过这种面。)現在如果順着紙帶沿閉綫把这片紙剪开,使割縫和它兩边差不多等距离,那末这張紙并不分成單独的兩部分——我們手里仍旧是一整片紙。类似剛才說过的一

些事实不得不使我們考慮到，根据“显而易見”而提出的理由，我們究竟能相信多少。

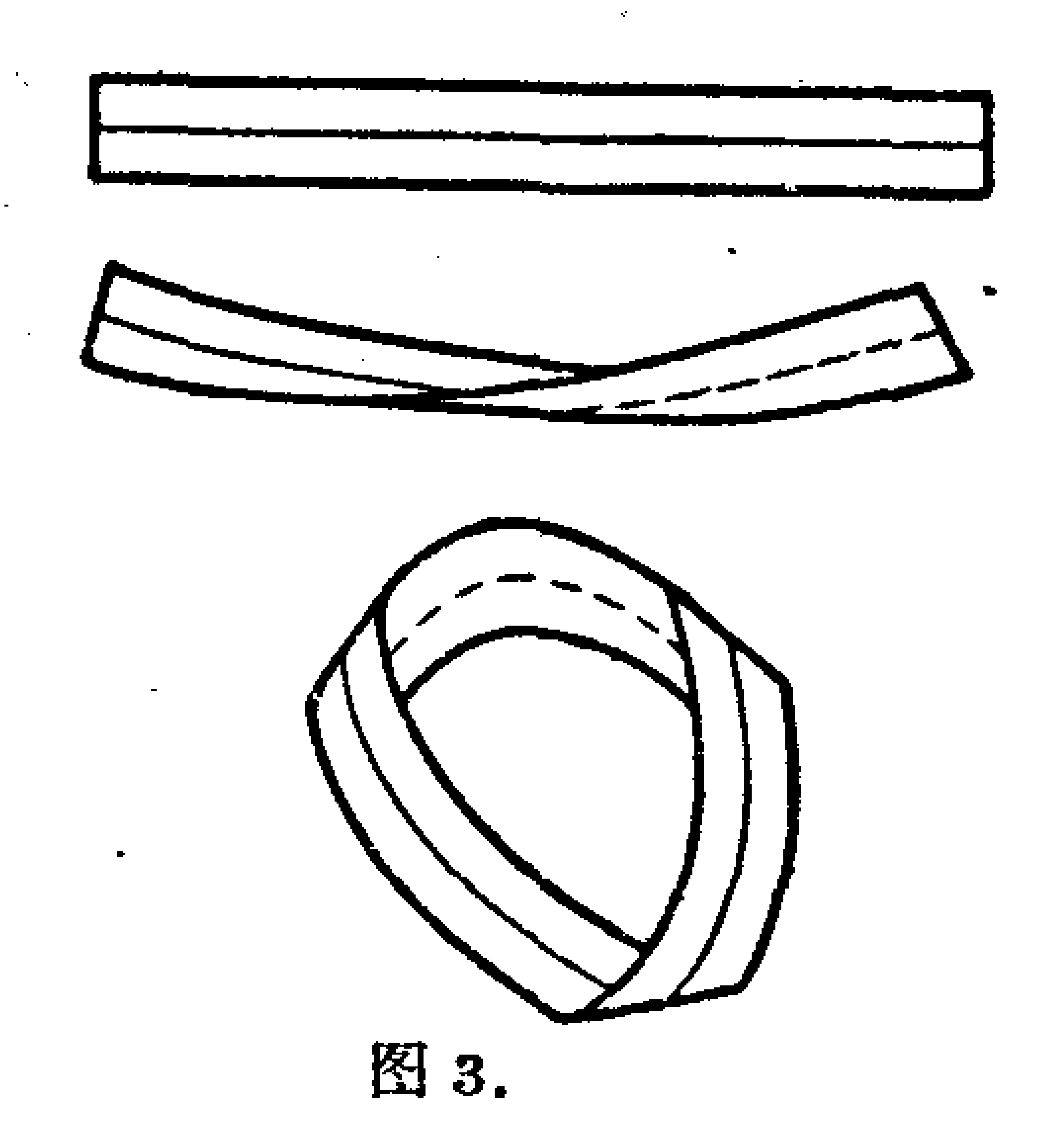
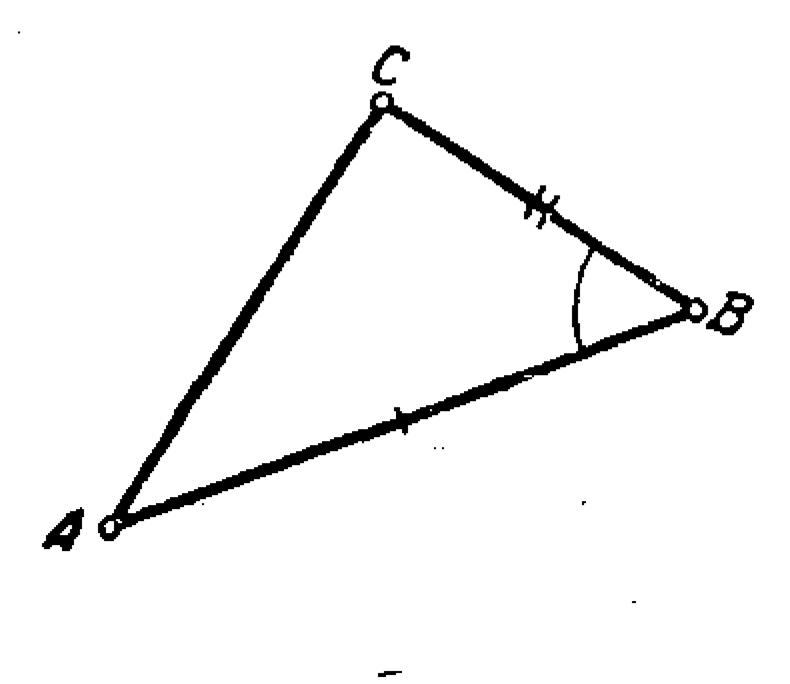


图 3.

2. 我們更仔細地来分析这个問題。把上面講过的这位六年級同学的情况作第一个例子。这位姑娘覺得很奇怪，老师画了兩个全等三角形，再来証明这件好象是十分显而易見的事情，就是：它們是全等的。当然，事实完全不是这样：教师根本沒有画全等三角形，她画了三角形 ABC（图 4）以后，却說另一个三角形 $A'B'C'$ 是这样構成的：$A'B'=AB$，$B'C'=BC$，以及 $\angle B'=\angle B$；然而我們并不知道，$\angle A'$ 和 $\angle A$、$\angle C'$ 和 $\angle C$ 以及边 $A'C'$ 和 AC 是不是相等（要知道，她并沒有按照角 A 和 C 来作出角 A' 和 C'，也沒有把边 $A'C'$ 作得和 AC 相等）。



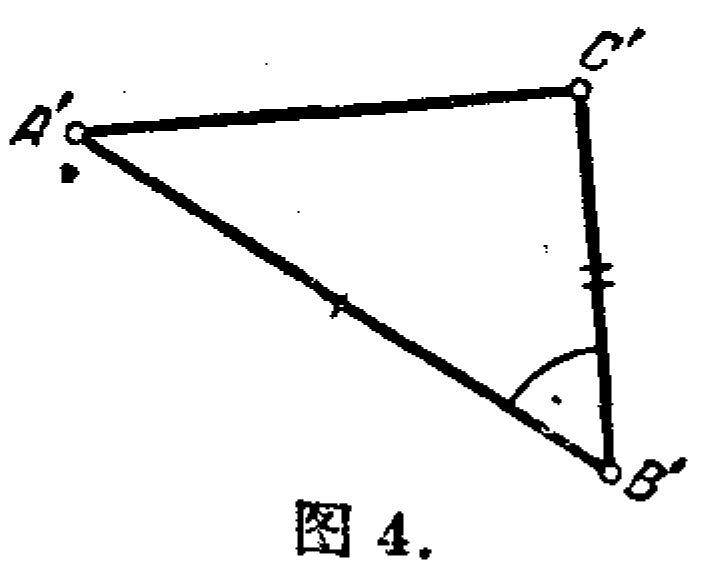
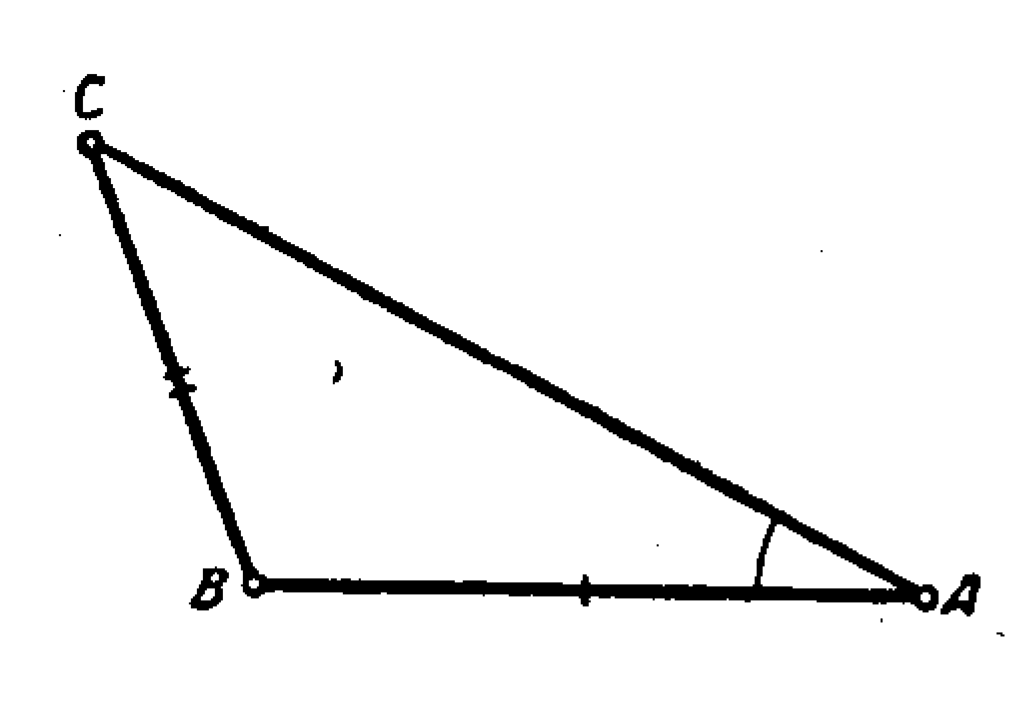


图 4.

可見，在这种情况我們必須从条件 $A'B'=AB$、$B'C'=BC$ 和 $\angle B'=\angle B$ 推出三角形的全等性来，这就是說，它們其余部分的相等当然是需要作一些推論，也就是需要証明的。也很容易指出，根据兩三角形三对相应元素分别相等而得到它們是全等的結論，远不是这样“显而易見”的，一下子就可以看出来的。我們把关于三角形全等的第一条定

理的某些条件改变一下：一个三角形的兩边相应地和另一个三角形的兩边相等，它們还有一对角相等，但不是这兩边的夾角，而是兩对等边中的一对例如 BC 和 $B'C'$ 的对角相等。我們把这些条件写出来：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$A'B'=AB$，$B'C'=BC$ 和 $\angle A'=\angle A$。关于这样兩个三角形，我們能說些什么呢？由于跟兩三角形全等的第一个情况类似，我們可以希望現在这兩个三角形也全等，但是图 5 非常显而易見地使我們相信，这里画的三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 虽然滿足条件 $A'B'=AB$、$B'C'=BC$和$\angle A'=\angle A$，它們却根本不相等。



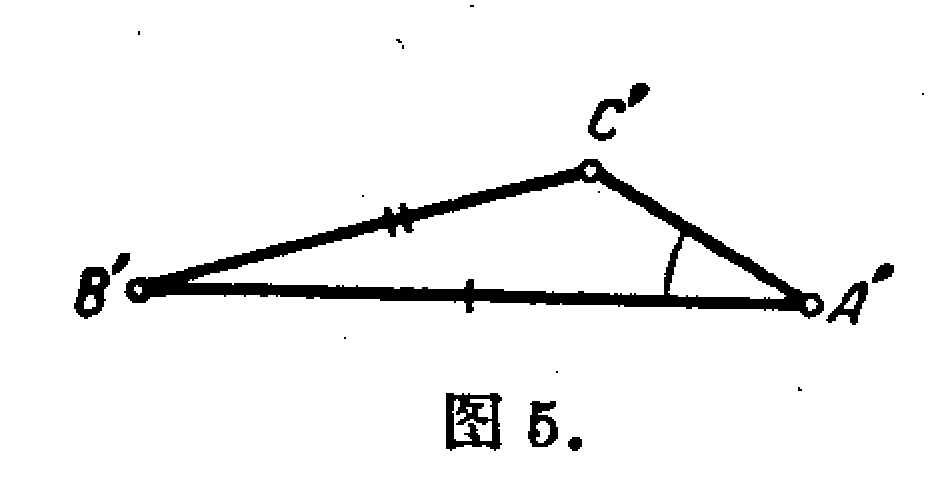


图 5.

象这一类的例子使我們不得不在思考时十分謹愼，它們十分清楚地指出，只有作出正确的証明，才能保証我們所設的命題的正确性。

3. 現在我們来分析引起我的鄰居多列疑問的第二条定理——关于三角形外角的定理。确实，在标准教科書里那張图上，外角都是鈍角、內对角都是銳角，不必測量，用眼睛就很容易看出来。但是，从这里是不是就可以得出結論，說这条定理不必証明了呢？毫无疑問，是不可以的。要知道，定理不是單單对画在書上、紙上或黑板上的那个三角形說的，而是对任意的三角形說的，它的形狀可以跟教科書上那个三角形很不一样。

例如，我們設想 A 点沿着一直綫离 C 点远去。这时候我們得到的三角形 ABC（图 6），在 B 点的角也是鈍角。假如 A 点离开 C 点 10 公尺的話，那末在这样狹長的三角形里，我們学校用的量角器已經不能覺察出內角 B 和外角的差别了。真的，如果 A 点离开 C 点的距离等于地球和太阳那么远，那就可以十分肯定地說，在現代最精密的測角仪器中，沒有一件能够覺察出这兩个角的差别来了。从这里可以看得很清楚，就是对这条定理也不应当說是“显而易見”的。对这条定理作的严格証明并不依賴图上画的三角形的偶然形狀，并且它指出，不管是怎样的三角形，不管它們各边間的相对長度怎样，关于外角的这条定理总是正确的。所以，就是在內角和外角之間的差别小到連我們的測量仪器都会測不出的时候，我們仍然可以坚信，这个差别是存在的。因为我們已經証明了，在所有的情況，三角形的外角永远比它的內对角大。

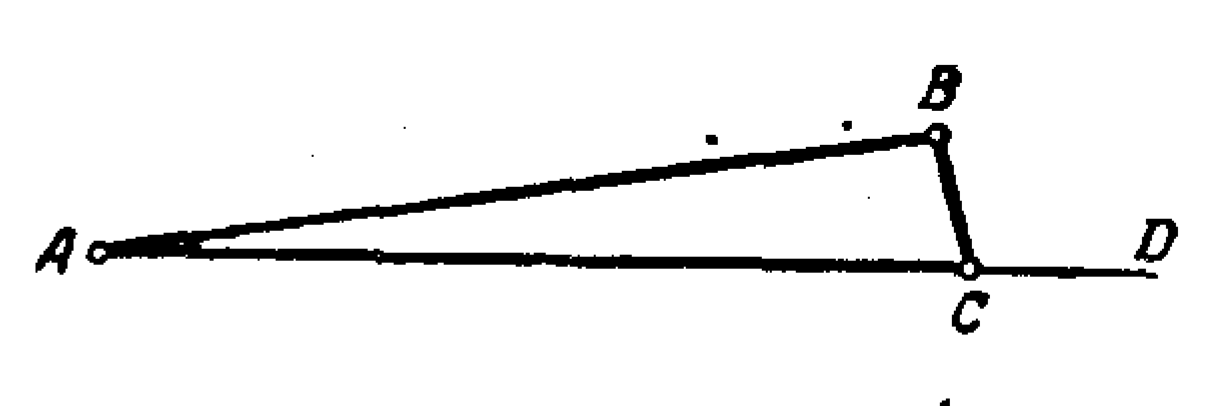


图 6.

从这个例子应該注意到，在証明几何定理时图所起的作用。应当好好記住，在証明定理时，图只是輔助的工具，它只是一个例子，只是要証明的定理涉及的整类几何图形的一个特殊情況。因此，善于在图上把图形的普遍的固有的性質和它特殊的、偶然的性質区别开来，是很重要的。比如說，标准教科書引用的关于三角形外角的定理的图上，外角是鈍角、內角是銳角这一事实是偶然的。显而易見，在証明对所有三角形都普遍成立的性質时，是不可以依靠这样的偶然事实的。

几何学証明的主要特征(在很大程度上决定这种証明的必要性)是用証明来确立空間图形的普遍性質。如果証明的过程是正确的，根据的出发点也是正确的，那末我們就可以确信所証明的原理的正确性。正因为这样，我們才相信任何一条几何定理，比如勾股弦定理就对任何直角三角形都成立，不管直角三角形的尺寸大小，边長是几毫米或是几百万公里。

4. 最后，关于証明的必要性还有一个非常重要的理由。就是，几何学不是描写物体空間性質的眞理的偶然堆砌，而是按照严格的規律建立起来的科学体系。在这个体系里，每一条定理和以前建立的命題的总和有机地联系起来，而每一个联系都是用証明揭示出来的。比如說，三角形三个內角的和等于180°这一条著名定理是根据平行綫的性質得到証明的，它指出了平行綫的理論和多角形的諸內角的和的性質之間的直接联系。和这完全相仿，相似形的全部理論都根据平行綫的性質。

这样，每一条几何定理和以前証明的定理構成的整个推理体系相联系，而以前証明的定理却和更早証明的定理相联系，这样一直推下去，直到構成整个几何学大厦的基础的基本定义和公理为止。任意取一条几何定理，分析它根据的所有命題，就不难探求得这个联系的体系。

現在，把关于証明的必要性的全部說明总結一下，我們可以这样說：

(一)在几何学中，只有少数基本的眞理——公理——可以不加証明地应用。其余的眞理——定理，都要根据这些公

理，循着一系列推理的方法来加以証明．公理本身，同时还有用公理証明的那些定理，被多次的观察和長期的实驗所証实，这样公理本身的正确性才得到了保証．

（二）証明是由于我們思維的基本規律之一——充足理由律——的要求而进行的，这个規律指出，我們的論断的正确性必須有严格的根据．

（三）在結構正确的証明中，只能依靠以前証明的命題，决不允許引用什么“显而易見”①．

（四）对于要証明的命題的普遍性，也就是指定理对于所有特殊情况都适用，也必須加以証明．

（五）最后，靠了証明，使几何学眞理具有科学知識的严整体系，在这个体系里揭示出空間形体的各种不同性質之間的全部內在联系．

三 証明应該是怎样的？

1．现在我們轉向下一个問題：証明必須滿足什么样的条件，我們才能認为它是**正确的**？这里的所謂正确，就是指这个証明保証了从正确的前提推出正确的結論．首先我們注意到，每个証明都是由一系列的推理組成的；所以証明的正确或者不正确，要看組成它的各个推理的正确或者不正确来决定．

象我們已經在前面看到的，演繹推理是把某些普遍的規

① 有許多由于它的“显而易見”而被認为毫无疑問的科学原理，后来发现原来是錯的．任何一門科学，每一条原理都应該严格地証明．

律应用到給定的特殊情况。为了不許推理中有錯誤，必須了解某些用来表示任何概念(包括几何概念)之間关系的图解。举个例子来說明一下。假設我們建立了这样的推理：(1)矩形的兩条对角綫相等。(2)正方形是一种矩形。(3)結論：正方形的兩条对角綫相等。

在这种情况我們有些什么呢？第一个命題确立了某个普遍規律，使人确信所有的矩形，也就是这一整类叫做矩形的几何图形，是屬于具有相等对角綫的一类四边形。第二个命題肯定了正方形这类图形是矩形这一类的一部分。从这里我們完全有理由作出結論：正方形是具有相等对角綫一类四边形的一部分。我們用一般形式来表达这推理。用 P 来表示大类别(具有相等对角綫的四边形)，用 M 来表示中类别(矩形)，用 S 来表示小类别(正方形)。这样我們的推理就象下面的格式：

(1)凡 M 为 P。

(2)凡 S 为 M。

(3)結論：凡 S 为 P。

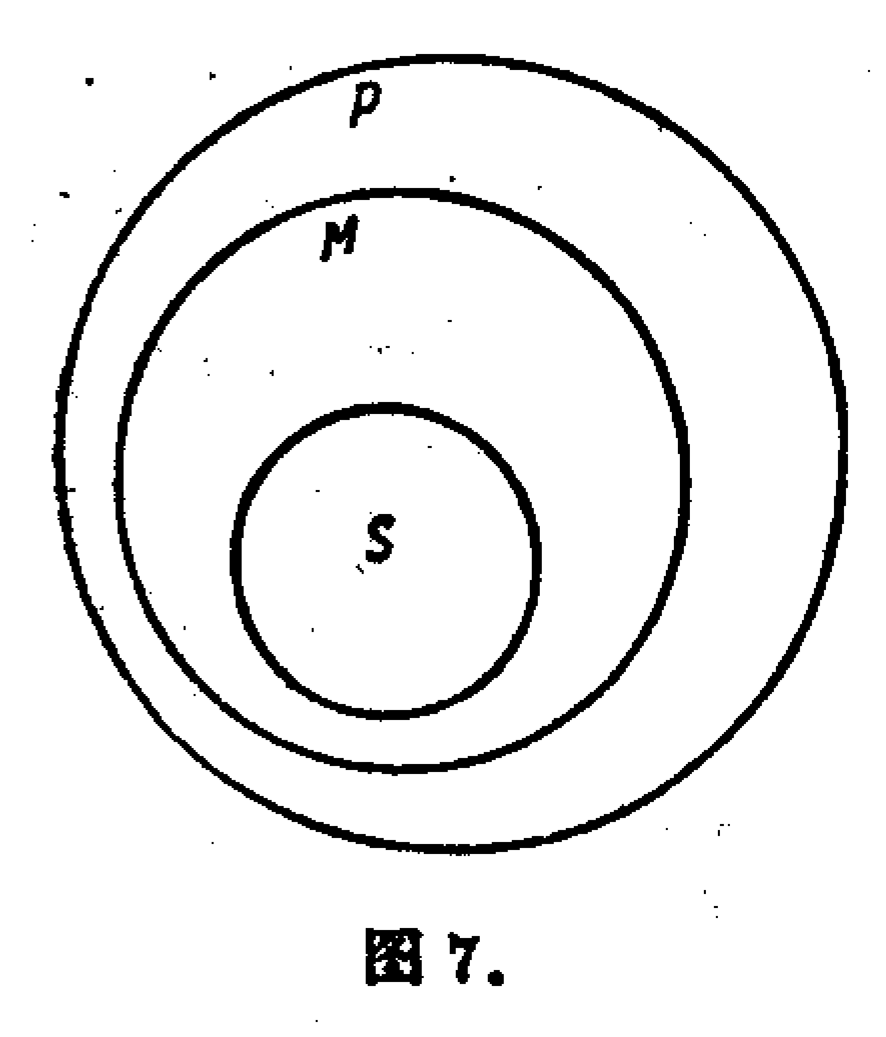


图 7.

这关系不难用图来表示。大类别 P，我們用大圓来表示(图 7)。中类别 M 用完全处在第一个圓內的較小的圓来表示。最后，小类别 S 用处在第二个圓內的更小的圓来表示。无疑地，在这种情况圓 S 完全处在圓 P 內。

我們得指出，这种表示概念之間的关系的方法是由偉大的数学家、彼得堡科学院院士里奥那德·欧拉（Леонард Эйлер；1707–1783）提出的。

用相仿的图解，我們也可以表示出推理的其他形式。我們再分析一个含有否定結論的推理：

（1）凡兩对角的和不等于 180° 的四边形，不能內接于一圓。

（2）斜角平行四边形兩对角的和不等于 180°。

（3）結論：斜角平行四边形不能內接于一圓。

我們用 P 来表示不能內接于一圓的这类四边形，用 M 来表示兩对角的和不等于 180° 的这类四边形，用 S 来表示斜角平行四边形。这样，我們肯定，我們的推理是按下列格式構成的：

（1）凡 M 都不为 P。

（2）凡 S 为 M。

（3）結論：凡 S 都不为 P。

这个关系用欧拉圓（图 8）来表示也十分明显。

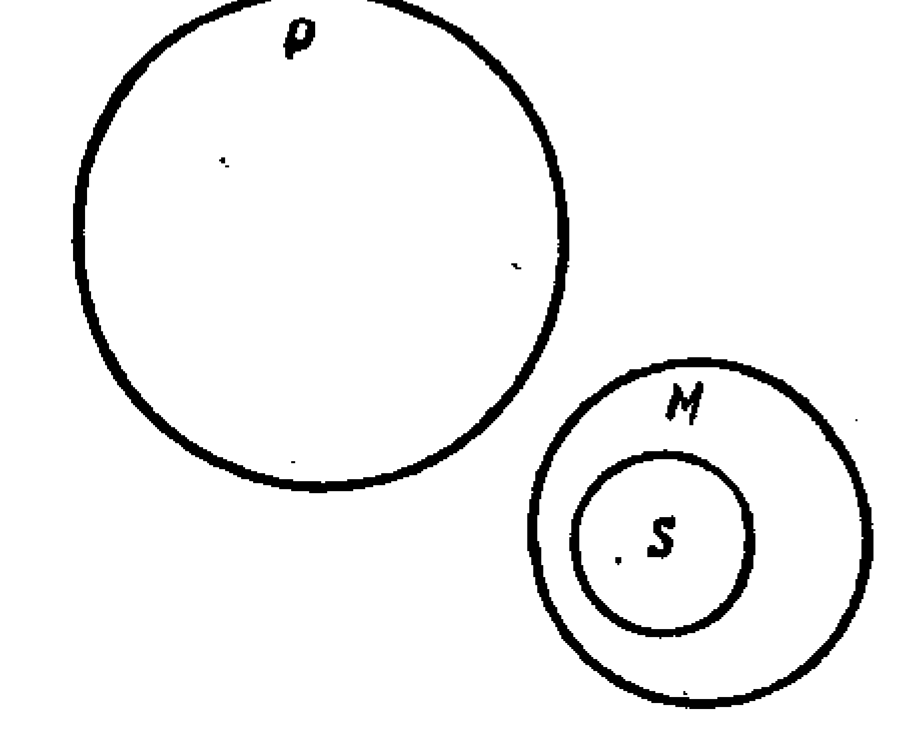


图 8.

几何学中絕大多数的演繹推理，不是按第一种格式構成，就是按第二种格式構成。

2. 类似的表示几何概念之間的关系的方法，使我們能够明白任何推理的結構，发現不正确的推理中的錯誤所在。

作为例子，我們来分析前面提到过的、老师認为是錯誤的那位八年級同学的推論。这位八年級同学作出了这样的推

理：

（1）凡外切四边形兩組对边的和必相等。

（2）有一已知梯形的兩組对边的和是相等的。

（3）結論：这已知梯形能够外切于一圓。

用 P 来表示外切四边形，用 M 来表示兩組对边的和相等的这类四边形，用 S 来表示兩底的和等于兩腰的和的这类梯形，我們的推論成为这样的格式：

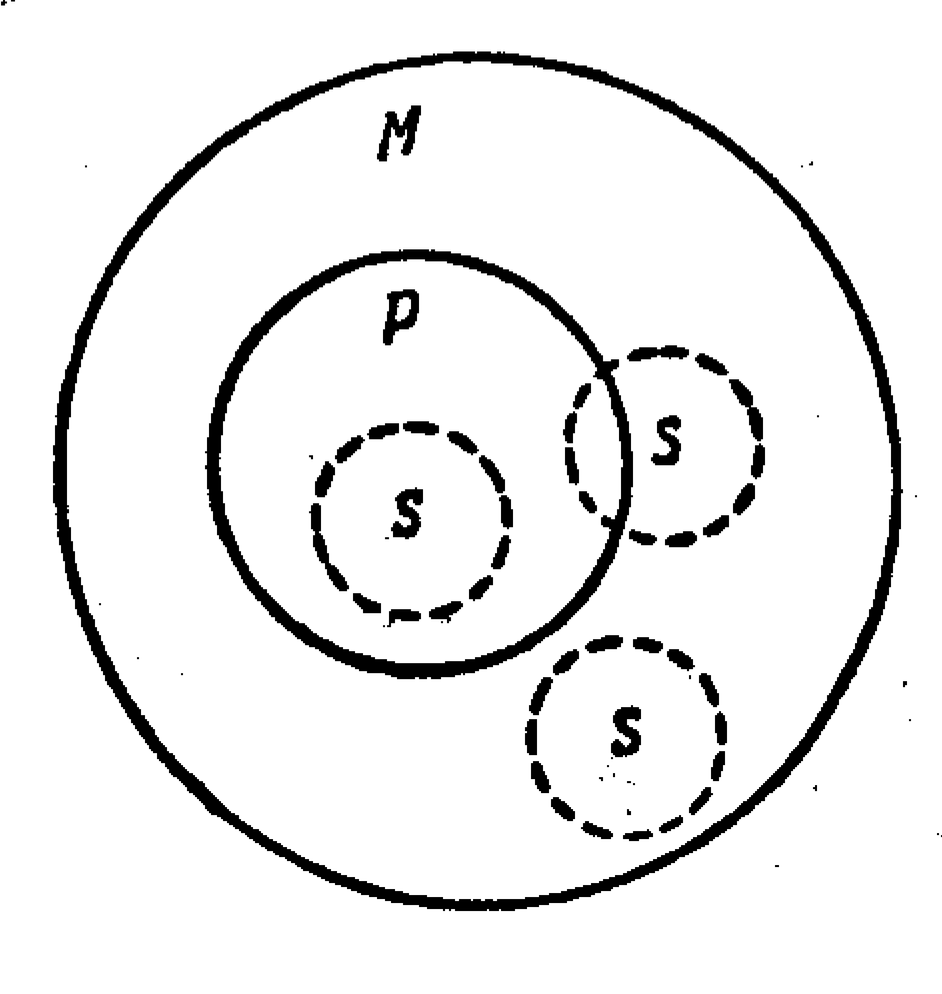


图 9.

（1）凡 P 为 M。

（2）凡 S 为 M。

（3）結論：凡 S 为 P。——这就錯了，因为我們用欧拉圓来表示这些类别之間的关系（图9），就可以看到，P 和 S 都处在 M 內，但是对于 S 和 P 之間的相互关系，我們并不能作出什么結論来。

为了更加清楚地使人相信得到的結論是不正确的，我們引用一个完全相似的推理来作例子：

（1）凡兩角互为鄰补角的，它們的和是 180°。

（2）兩已知角的和是 180°。

（3）結論：兩已知角互为鄰补角。

这結論当然是錯的，因为兩角的和可以是 180°，却根本不是鄰补角（例如圓內接四边形的兩对角）。为什么会得到这类錯誤呢？这点的解釋如下：因为采用类似的推論的人沒有引用逆定理，却引用了正定理。在外切四边形的例子里，定理是以

外切四边形兩組对边的和相等这一点作基础的。而逆定理凡兩組对边的和相等的四边形可以作一內切圓，在标准教科書里并沒有証明；虽然它是可以証明的，現在我們就把这个証明写出来。

如果这条定理已經証明，那末正确的推理应構成如下的形式：

（1）凡兩組对边的和相等的四边形，可以作一內切圓。

（2）已知梯形兩底的和等于兩腰的和。

（3）結論：因此可以作一圓內切于已知梯形。这个結論当然是完全正确的，因为它是按图7表示的格式構成的：

（1）凡 M 为 P。

（2）凡 S 为 M。

（3）結論：凡 S 为 P。

所以，这位八年級同学的錯誤就在这里：他在他的証明里依靠了正定理，而当时他却应該根据逆定理。

3. 我們来証明这条重要的逆定理。

〔定理〕 **凡兩組对边的和相等的四边形，可以作一內切圓。**

我們首先注意到，如果可以作一圓內切于一四边形，那末这个圓的圓心到四边形各边的距离必相等。又因为一个角的平分綫是到这个角的兩边等距离的点的軌迹，所以內切圓的圓心一定处在四边形各內角的平分綫上。这样看来，內切圓圓心就是四边形各內角平分綫的交点了。

进一步說，如果这个四边形即使只有三条角的平分綫相

交于同一点，那末第四条角的平分綫也必定通过这一点，并且这一点和所有四边等距离，因此它就是內切圓的圓心。要証明这一点，可以运用証明凡三角形都可以作一內切圓这条定理时引入的那些推論，因此我們就讓讀者自己去作出証明。

我們現在轉向証明的基本部分。假定我們有一个四边形 $ABCD$（图10），并且有下列关系成立：

$$AB+CD=BC+AD. \quad (1)$$

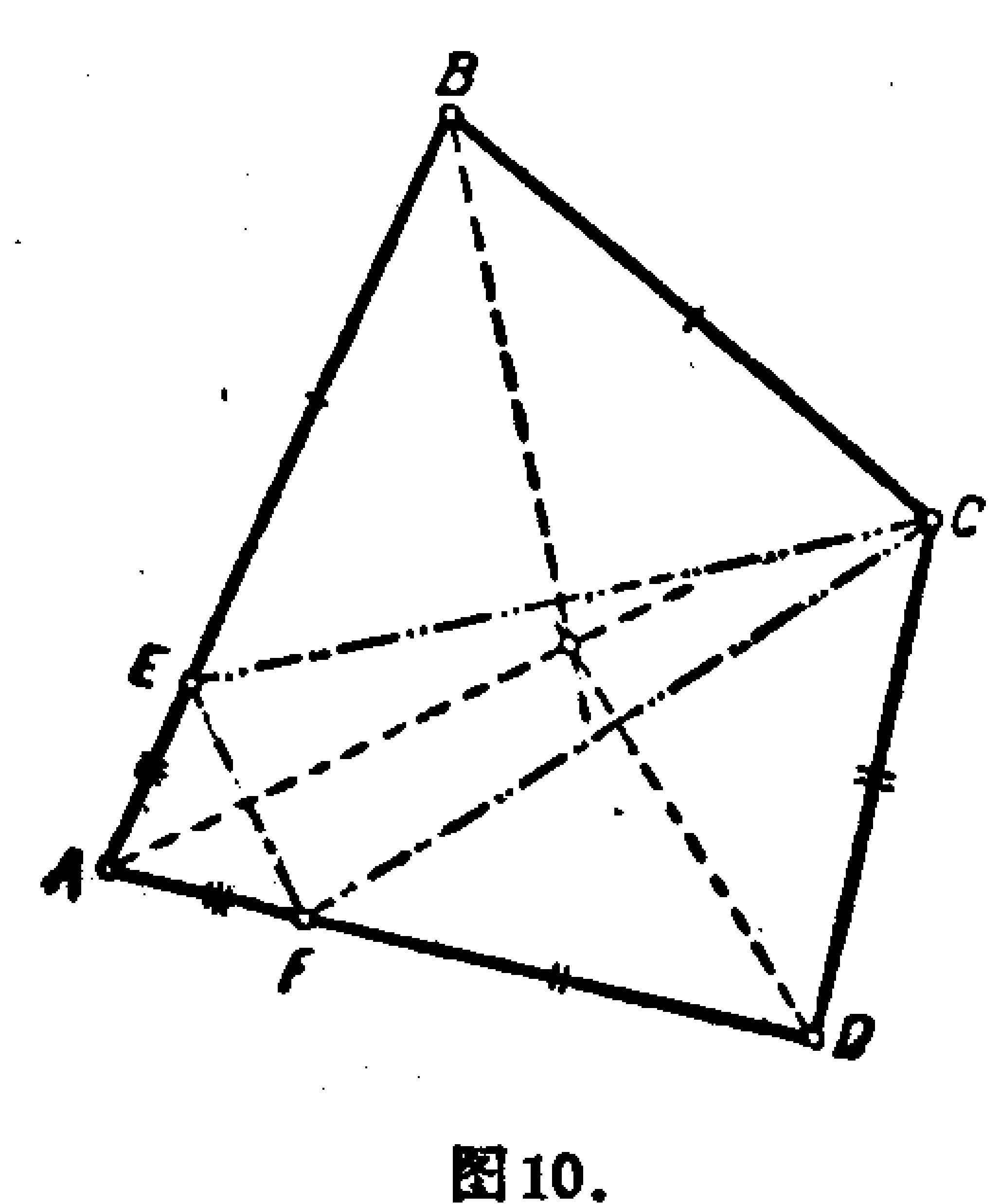


图10.

首先我們除去四边形是菱形的情况，因为菱形的对角綫就是內角的平分綫，所以它們的交点就是內切圓的圓心，这就是說，在菱形里总归可以作一个內切圓。因此我們假設，在我們的四边形里有兩条不相等的鄰边。例如，設 $AB>BC$。这时候，根据等式 (1) 我們將有：$CD<AD$。在綫段 AB 上取 $BE=BC$，我們就得到等腰三角形 BCE。在綫段 AD 上取 $DF=CD$，我們就得到等腰三角形 CDF。我們来証明 $\triangle AEF$ 也是等腰的。事实上，我們把等式(1)里的 BC 移到左面，CD 移到右面，就得到：$AB-BC=AD-CD$，而 $AB-BC=AB-BE=AE$，$AD-CD=AD-DF=AF$。因此，$AE=AF$，也就是 $\triangle AEF$ 是等腰的。在得到的三个等腰三角形里作頂角的平分綫，也就是作 $\angle B$、$\angle D$ 和 $\angle A$ 的平分綫。这三条角的平分綫垂直于底边 CE、CF 和 EF 并把它們等分。因此这些角

的平分綫是三角形CEF的中垂綫，它們必定相交于一点。因此，这个四边形的三条角的平分綫相交于同一点，正象上面証明的，它就是內切圓的圓心。

4. 証明中常常会碰到这样的錯誤，就是：沒有引用逆定理，却引用了正定理。要不犯这种錯誤，就应該十分小心。例如，要同学們确定边長是3、4和5單位長度的三角形的形狀时，常常可以听到这样的回答：这个三角形是直角三角形，因为它兩条边的平方和3^2+4^2等于第三条边的平方5^2，这时候他們引用了勾股弦定理，虽然应該引用的倒是它的逆定理。这条逆定理肯定，假如三角形兩边的平方和等于第三边的平方，那末这个三角形就是直角三角形。虽然在标准教科書里証明了这条定理，但是往往对它注意不够，这就是造成上面指出的錯誤的原因。

由于这样的情况，确定一下正、逆定理同时成立的条件是有好处的。我們已經知道了正、逆定理同时成立的一些例子，但是也可以举出不少例子，正定理成立而逆命題不成立。例如，正定理正确地断言，凡直角都相等；而它的逆命題却应該說，凡相等的角都是直角，这当然是不对的。

为了清楚地理解正、逆定理之間的关系，我們再来采用表示这种关系的图解方法。如果正定理中含有論断："凡S为P"（"凡直角都相等"），那末逆命題里应含有論断："凡P为S"（"凡相等的角都是直角"）。用欧拉圓来表示正定理中

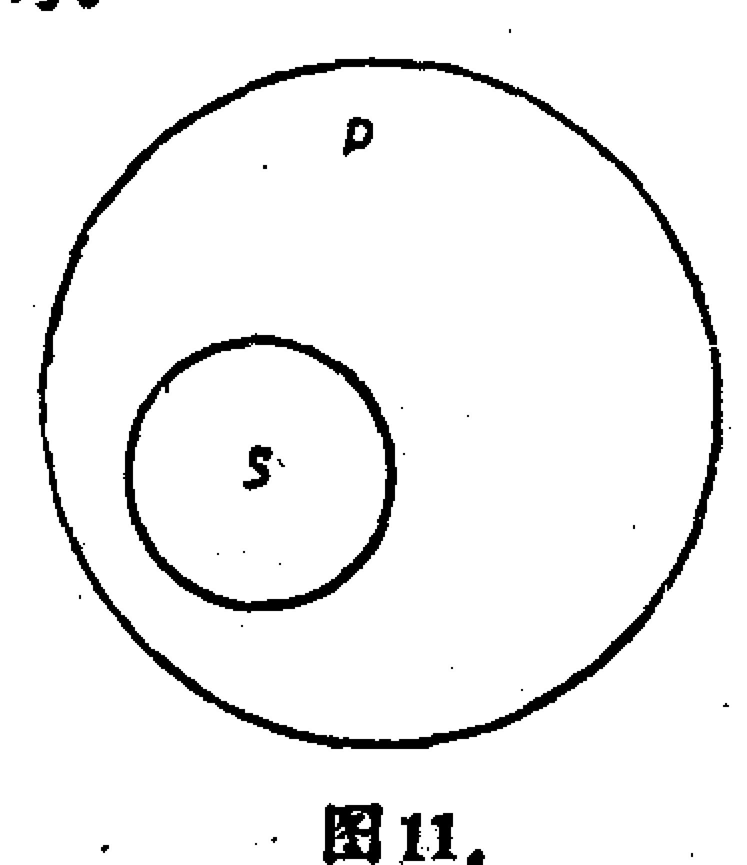


图11.

各概念之間的关系（图 11），我們确信，类别 S 是类别 P 的一个組成部分，从这里一般地說，我們只能断定，“某些 P 为 S”。“某些对相等的角是直角”。

究竟在什么条件下，命題“凡 S 为 P”和命題“凡 P 为 S”才同时成立呢？十分显而易見，在而且只有在类别 S 和 P 全同（$S=P$）的时候，才会发生这种情况。在这种情况，表示 S 的圓和表示 P 的圓相重合（图 12）。例如，对于“等腰三角形的兩个底角相等”这条定理，它的逆定理“兩个底角相等的三角形是等腰三角形”也成立。这点的解釋是：等腰三角形就是兩个底角相等的三角形，它們是同一类的。正跟这一样，直角三角形和一边的平方等于另外兩边平方和的三角形也是同一类的。我們这位八年級同学是“幸运儿”，他总算解出了这道題，虽然他根据了正定理，沒有根据逆定理。

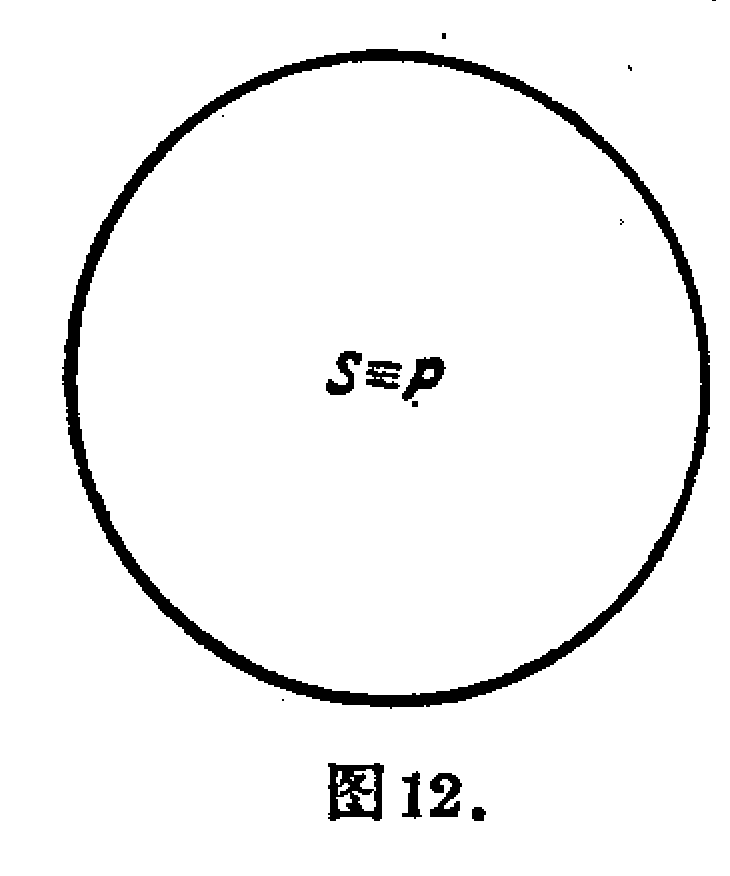


图 12.

但是，这只是因为可以作內切圓的四边形和兩組对边的和相等的四边形是同一类的，才有可能。（在所設情况，“凡 P 为 M”和“凡 M 为 P”都是正确的，——見第 20 頁推論的格式。）

这研究同时指出，如果逆定理是成立的，那末它也决不是正定理的显而易見的推論，而**永远要求作專門的証明**。

5. 有时候会碰到，正、逆定理并不合乎“凡 S 为 P”和“凡 P 为 S”这种格式。这种情况发生在一些定理表示成所謂“假言判断”的形式，它按公式可以記作：“如 A 为 B，則 C 为 D”。

例如："如果一四边形外切于一圓，那末它的兩組对边的和相等。"命題的第一部分——"如 A 为 B"，叫做定理的**条件**，第二部分——"則 C 为 D"，叫做定理的**結論**。逆定理就这样从正定理得到：把結論作条件，把条件作結論。在很多情况，定理用假言判断的形式表示，比起那种所謂"直言判断"形式"凡 S 为 P"更常見些。但是不难相信，这差别是不存在的，假言判断很容易改变成直言判断，直言判断也很容易改变成假言判断。例如，用假言判断形式表达的定理："如果兩条平行綫和第三条直綫相交，那末內錯角相等"，可以改成用直言判断的形式表达："兩条平行綫和第三条直綫相交时構成的內錯角相等。"因此，我們的討論对于表达成假言判断形式的定理仍然有效。而这里正、逆定理同时成立，是由于相应概念的类别全同。可見，在剛才分析过的例子中正、逆定理所以能同时成立，是由于"兩条平行綫"和"与第三条直綫相交时構成的內錯角相等的兩直綫"是同一类别的。

6. 現在我們来分析証明中的另一些錯誤。証明中发生錯誤，还往往是因为在証明时根据了特殊情况，而沒有注意到所作图形的其他性質。在我鄰居多列的推論里正存在这样的錯誤，多列要証明关于任意三角形的外角的普遍定理，但是他却只限于分析了銳角三角形；确实，这种三角形的所有外角是鈍角，而所有內角是銳角。

我們再举一个在証明中犯这类錯誤的例子，这一回犯的錯誤可远沒有那样明显了。前面我們曾經举过兩个不相等的三角形的例子（見图5），虽然它們有兩条边和一个相应的对

角相等．現在我們提出一种“証明”，它可以不顧已經确定的事实，却断言滿足上述条件的三角形必相等．这个証明很有趣，因为它和标準教科書里三角形全等的第三条判定定理的証明非常相似．

設 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 內，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$ 和 $\angle C=\angle C'$（图13）．为了証明，我們把 $\triangle A'B'C'$ 拼在 $\triangle ABC$ 上，使边 $A'B'$ 和边 AB 重合，使点 C' 落在 C'' 上．連結 C 和 C''，并假設綫段 CC'' 和边 AB 相交于 A 和 B 之間（图 13，a）．根据条件，$\triangle ACC''$ 是等腰的（$AC=AC''$），因此 $\angle ACC''=\angle AC''C$；因为 $\angle C=\angle C''$，所以从等角减去等角得 $\angle BCC''=\angle BC''C$，

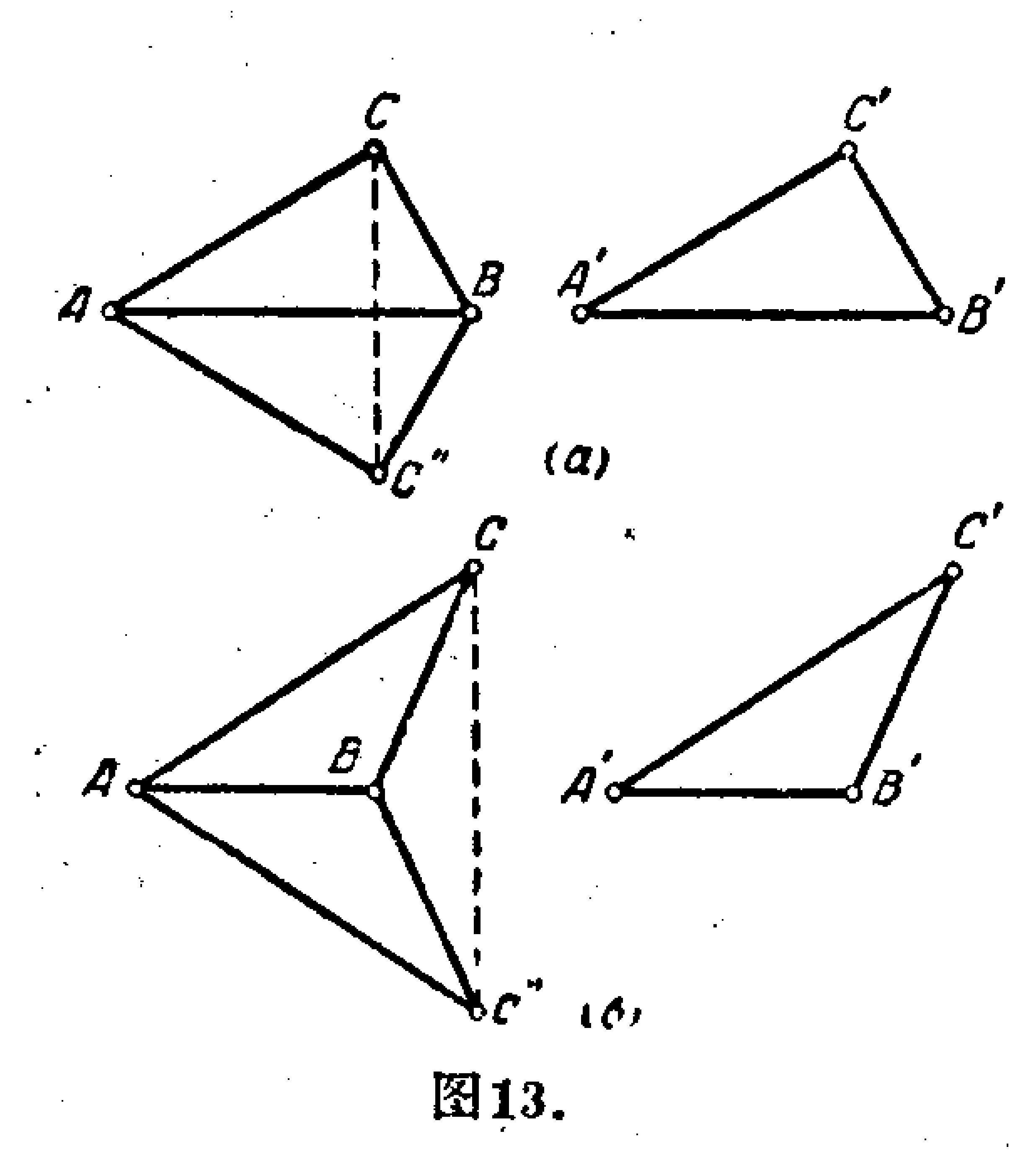


图13.

这就是說，$\triangle CBC''$ 也是等腰的．因为 $BC=BC''$，这样由于三边相等，$\triangle ABC=\triangle ABC''$．所以 $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$．

假如綫段 CC'' 和直綫 AB 的交点在綫段 AB 外面，那末定理仍然是成立的（图 13，$б$）．事实上，在这种情况 $\triangle ACC''$ 也是等腰的，因而 $\angle ACC''=\angle AC''C$．但是由于 $\angle C=\angle C''$，所以从前一等式的兩个角减去这兩个角也得到 $\angle BCC''=\angle BC''C$，因而 $\triangle BCC''$ 是等腰的，$BC=BC''$，我們又得到了三角形全等的第三种标志，也就是又得到 $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$．

看起来我們象已經作了充分的証明，并且徹底研究了所有可能的情况。但是，原来还漏掉了一种可能情况，就是当綫段 CC'' 通过綫段 AB 端点的情况。在图 14 上，綫段 CC'' 通过 B 点。容易看出，在这种情况我們的討論是不适用的，正象图 14 所示，这兩个三角形可以是完全不同的。

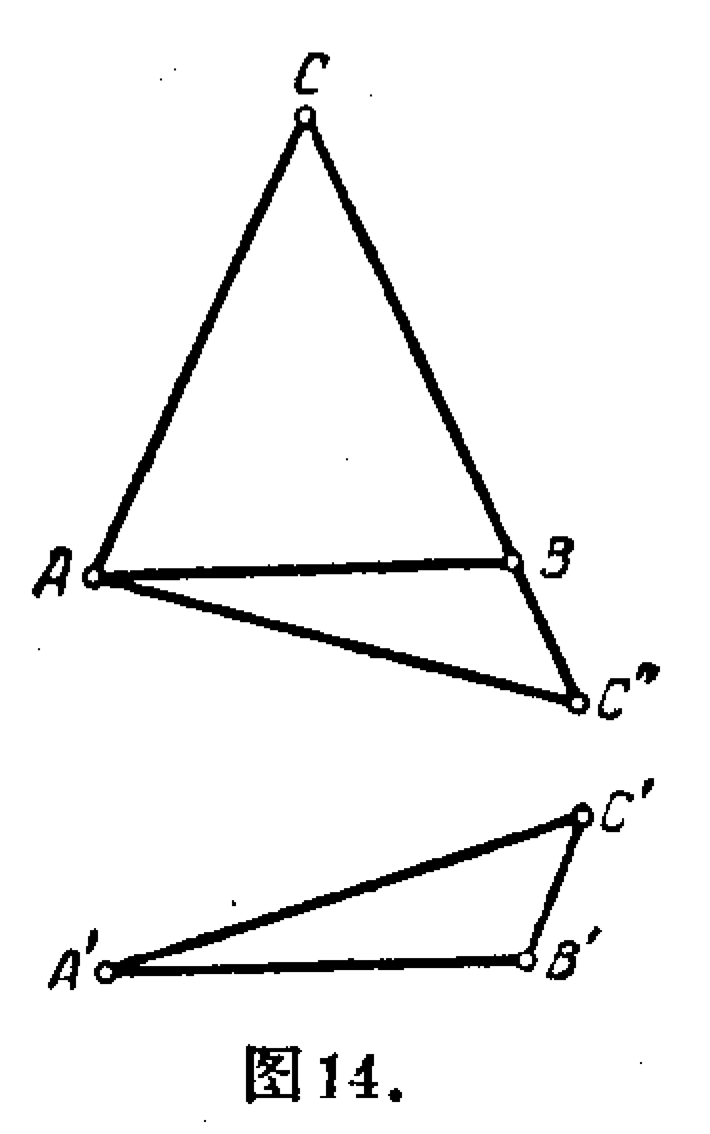
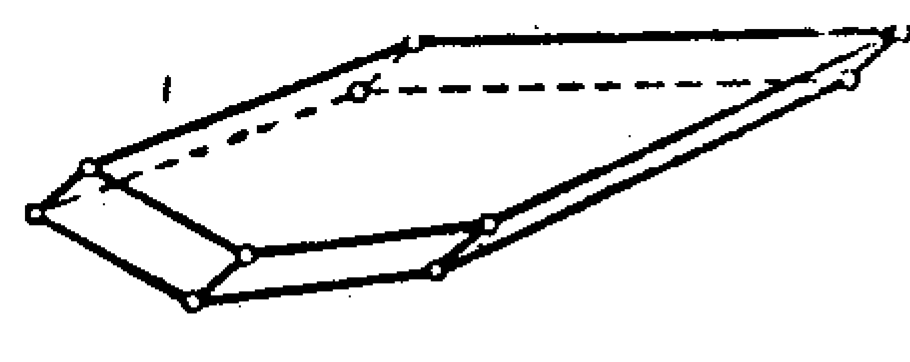


图 14.

和这相似的另一类可以引为教訓的錯誤的例子，是关于斜棱柱的側面积以及直棱柱和斜棱柱的等体积性的定理。这些定理中第一条肯定："棱柱的側面积等于它的直截面的周長和側棱的長的积。"第二条定理說："斜棱柱和以它的直截面为底面、側棱为高的直棱柱等积。"但是不难相信，这兩条定理只是对这样的特殊情况，就是当棱柱的棱的長度达到可能在棱柱內作一直截面的情况，才可以証明。同时还存在一整类这样的棱柱，在这类棱柱里不能作和所有側棱都相交的直截面。这就是高度很小的斜得很厉害的棱柱（图15）。在这样的棱柱里，和一条側棱垂直的截面不和其余的棱相交，因而在証明这些命題时引用的所有推論都变得不适用了。


图 15.

发生这种錯誤的原因是由于我們已經根深柢固地习惯把棱柱想象成有足够高度的柱子形狀；在黑板上、練习本上、教科書上，也几乎从来不曾画出过矮得象"薄片"似的棱柱。这个例子也指出了，我們应該怎样小心地对待

我們用来解釋証明的图. 每当我們由于証明过程的需要而进行作图时,老应該問問自己:"是不是在所有的情形都可以作这样的图?"如果在証明上述关于斜棱柱的命題时也提出了这样的問題,那就不难找到不能作直截面的棱柱的例子.

7. 在最后兩个例子里,錯誤的本質是在: **証明的并不是应該証明的命題**,**而只是**和証明引用的图形特性有关的**某种特殊情况**. 可以再举出一些类似的錯誤例子,只是它們更隐蔽些,不象这样一望而知.

現在来談談关于不可公度綫段的存在性的証明. 首先指出兩綫段的公度的定义,并且确定这个公度能把兩已知綫段的和与差分成整数倍. 然后指出欧几里得就已經知道的找尋公度的方法. 这个方法可以归結如下:用較短的綫段去分較長的綫段,用得到的第一次剩余去分較短的綫段,用第二次剩余去分第一次剩余……能把上一次剩余分整数次的剩余,就是兩已知綫段的最大公度. 进一步确定,有公度的綫段叫做**可公度的**綫段,沒有公度的綫段叫做**不可公度的**綫段. 但是存在不可公度的綫段这个事实本身,应該用找出这样的綫段的方法从理論上加以証明,哪怕只有一对这样的綫段也好. 通常都引用正方形的对角綫和它的边的不可公度性作例子. 証明是利用欧几里得的方法来进行的,这方法是:依次用正方形的边来分对角綫,再用所剩綫段来分正方形的边……这时候就可以看出,对角綫与边的差就是新的正方形的边,又应該拿它来分新的对角綫……,这就是說,这样的依次分割的过程永远不会結束,也就是不会找到正方形的对角綫和边之間的

最大公度．进一步就作出結論：可見，要找到正方形的边和对角綫的公度是不可能的，这也就是說，这兩个綫段是不可公度的．

这个結論的錯誤究竟在什么地方呢？这里的錯誤是在：根据用欧几里得方法不可能找到公度这一点，无論怎样也推不出不存在这样的公度这句話．要知道，假使我們用某种探索方法不能找到某种对象，那末这并不意味着这种对象就不存在，因为也許可以用其他方法找到它．比如說，我們决不能同意这样的推論："电子在无論哪种显微鏡下都不能看到，因此电子是不存在的．"很明显，这样的推論是很容易用下面的話来駁倒的："除了显微鏡以外，还存在其他的工具和方法，靠它們的帮助，我們可以确信电子是存在的．"

为了使得关于不可公度綫段的存在性的証明严格起来，必須預先証明下面这个命題．

如果寻找兩綫段的最大公度的过程能够无限制繼續下去，那末这样的綫段是不可公度的．

我們来証明这个重要的命題．設$\overline{a}$和$\overline{b}$是兩个已知綫段(我們用字母上面加一横来表示綫段，用不帶一横的字母来表示数值)，而且$\overline{a}>\overline{b}$．設在依次用$\overline{b}$来分$\overline{a}$，用第一次剩余$\overline{r_1}$来分$\overline{b}$……时，我們得到剩余的无限序列：$\overline{r_1}$，$\overline{r_2}$，$\overline{r_3}$，……，而且每一个在前面的剩余都比后一个大．这样，我們有：

$$\overline{a}>\overline{b}>\overline{r_1}>\overline{r_2}>\overline{r_3}>\cdots\cdots$$

我們假設綫段$\overline{a}$和$\overline{b}$有公度$\overline{p}$，根据公度的性質，$\overline{a}$、$\overline{b}$和每一个剩余$\overline{r_1}$、$\overline{r_2}$、$\overline{r_3}$、……都应該是$\overline{p}$的整数倍．設$\overline{a}$是$\overline{p}$的

m 倍，$\overline{b}$ 是 $\overline{p}$ 的 n 倍，$\overline{r_1}$ 是 $\overline{p}$ 的 n_1 倍，$\overline{r_2}$ 是 $\overline{p}$ 的 n_2 倍，……$\overline{r_k}$ 是 $\overline{p}$ 的 n_k 倍等等。数 m、n、n_1、n_2、n_3、……都是正整数，而且根据这些綫段之間的不等式，在这些数之間我們也將有相应的不等式

$$m > n > n_1 > n_2 > n_3 > \cdots\cdots$$

因为我們假設綫段的序列是无限的，那末数列 m, n, n_1, n_2, n_3, ……一定也是无限的；这是不可能的，因为递減的正整数序列不可能是无限的。得到的矛盾迫使我們否定关于这样的綫段存在公度的假設，也就是肯定它們是不可公度的。关于正方形的例子，使我們相信确实存在这样的綫段，对它們来說，依次分割的过程可以永不終止，这也就是說，正方形的对角綫和边是不可公度的。

如果沒有这个补充的命題，不可公度綫段的存在性的証明并沒有达到自己的目的，因为証明的原来根本不是我們需要証明的那个命題。

8. 在証明中也往往发生另一种类型的錯誤，这种錯誤就是在証明时依靠了还沒有証明过的命題。甚至于还有这样的情况，虽然并不常見，就是証明时引用的恰巧是正在証明的命題。比如說，有时候会听到老师和同学間的这样的对話。老师問道："为什么这兩条直綫是垂直的？"同学回答說："因为它們的夾角是直角。""那末为什么是直角呢？""因为这兩条直綫是互相垂直的。"

类似这样的錯誤叫做"証明中的循环"，象上面說的这样明显的形式是很少碰到的。比較常見的是这种錯誤的隐蔽形

式。例如，給同学們出一道題："試証明，如果一个三角形有兩条角的平分綫相等，那末这个三角形就是等腰三角形。"

証明是这样进行的："設在 $\triangle ABC$ 內，角的平分綫 AM 和 BN 相等(图 16)。我們来分析 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ABN$，它們是全等的，因为 $AM=BN$，AB 是公共边，而且 $\angle ABN=\angle BAM$，因为它們是兩个相等底角的一半。这样，$\triangle ABM=\triangle ABN$，可見 $AN=BM$。我們再来分析 $\triangle ACM$ 和 $\triangle BCN$，它們是全等的，因为 $AM=BN$，而且这兩条边的相应的毗鄰的角相等。所以 $NC=MC$，可見 $AN+NC=BM+MC$，也就是 $AC=BC$，这就是要証明的。"

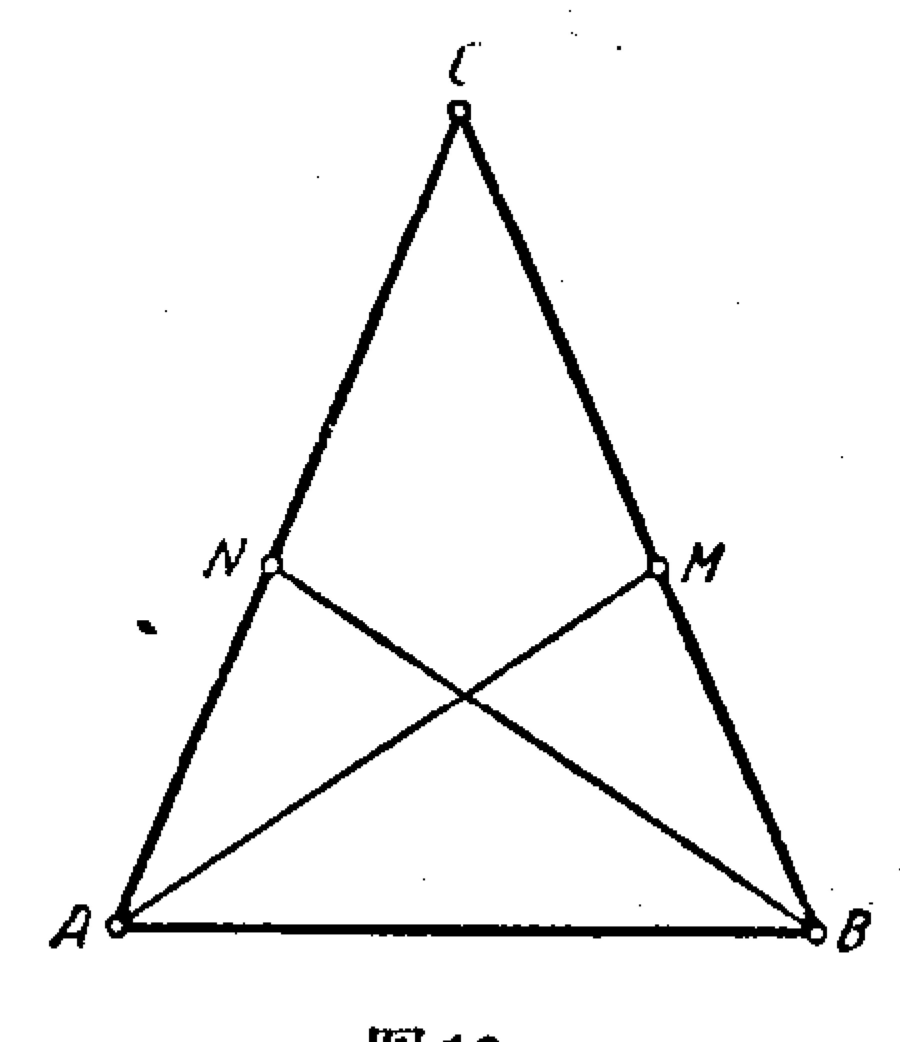


图16.

这个証明，錯誤就在引用了三角形兩底角相等。但是要知道，这兩个角的相等是从等腰三角形推导出来的，这却正是要証明的命題。

也往往有这样的情况，証明时根据了还沒有証明过的命題，認为它們是显而易見的，虽然这些命題并沒有归入公理一类。我們来研究兩个例子。在研究关于直綫和圓相互位置的問題时，我們看到三种情形：(1)直綫和圓心的距离大于半徑——直綫經过圓的外部；(2)直綫和圓心的距离等于半徑——直綫和圓有一个而且只有一个公共点(相切)；(3)直綫和圓心的距离小于半徑——直綫和圓有兩个公共点(相割)。

我們要注意这一点，对前兩个命題都作了正确的証明，而对第三种情形却說："一直綫經过圓內的一点，那末，显而易見直綫是和圓相割的。"然而不难看出，在这个論断中，在"显而易見"这个詞下面包含着一个十分重要的几何命題："凡經过圓內一点的直綫，必和圓相割。"的确，这个命題是相当显而易見的，但是我們已經指出，"显而易見"这个概念是多么模糊和不明确。所以这个命題必須不是归入公理，就是用其他的命題來証明。

我們引用在初等几何課本里提到的、关于外切四边形的逆定理的証明来作第二个例子。这就是要証明，**如果四边形兩組对边的和相等，那末在这个四边形里就可以作一內切圓。**

我們按字面进行証明："已知 $AB+CD=BC+AD$（图17）。作圓和边 AB、BC、CD 相切。証明，这圓也和边 AD 相切。我們假設它不和边 AD 相切。过 A 点作切綫 AD_1，就得到外切四边形 $ABCD_1$；在这个四边形里，根据正定理就有 $AB+CD_1=BC+AD_1$。从原来的等式逐項減去这个等式，就得到：$CD-CD_1=AD-AD_1$，或者 $DD_1=AD-AD_1$，这是不可能的（$\triangle ADD_1$ 兩边的差不可能等于第三边）。因此，和边 AB、BC、CD 相切的圓必定也和边 AD 相切。"

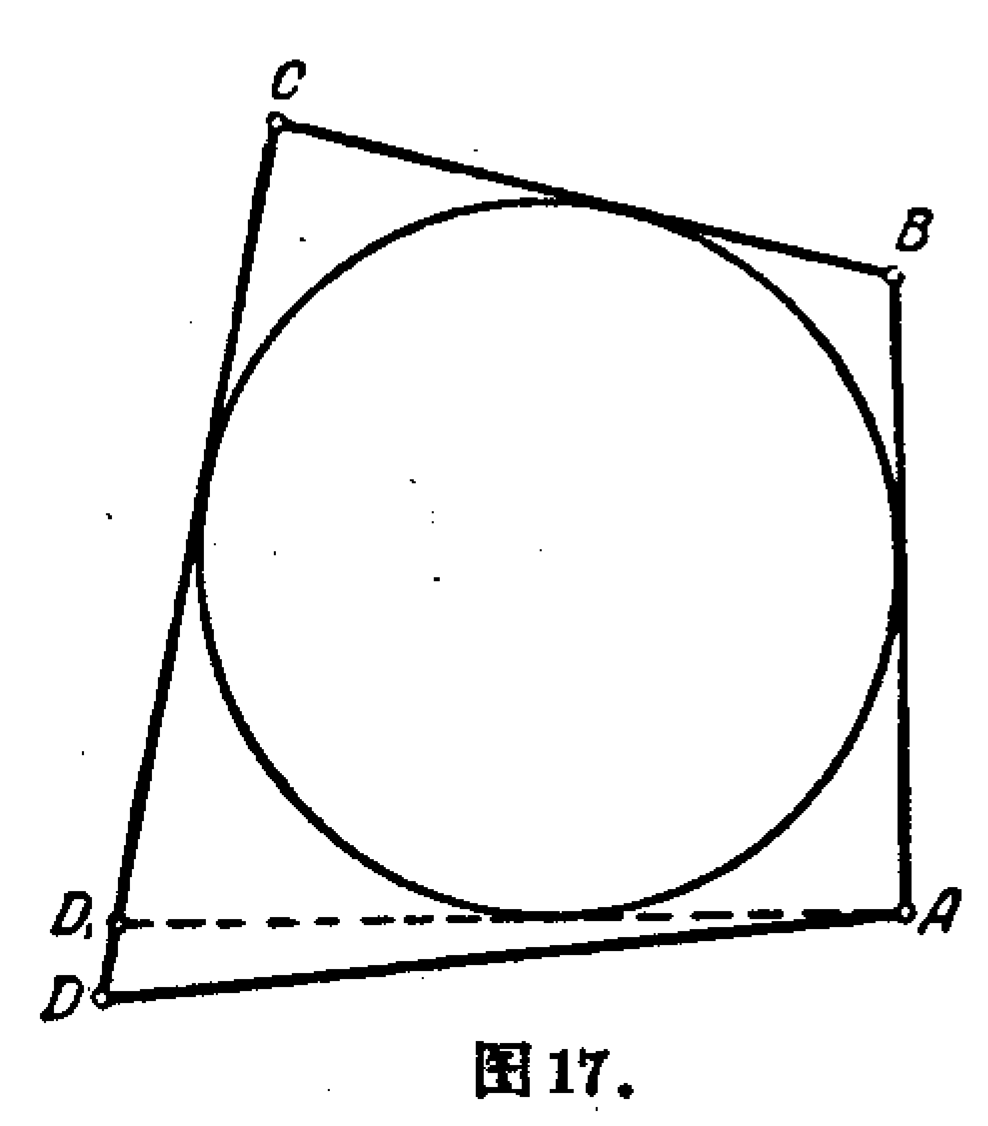


图17.

这个証明的錯誤是在根据了还沒有証明的关于点 A 的位

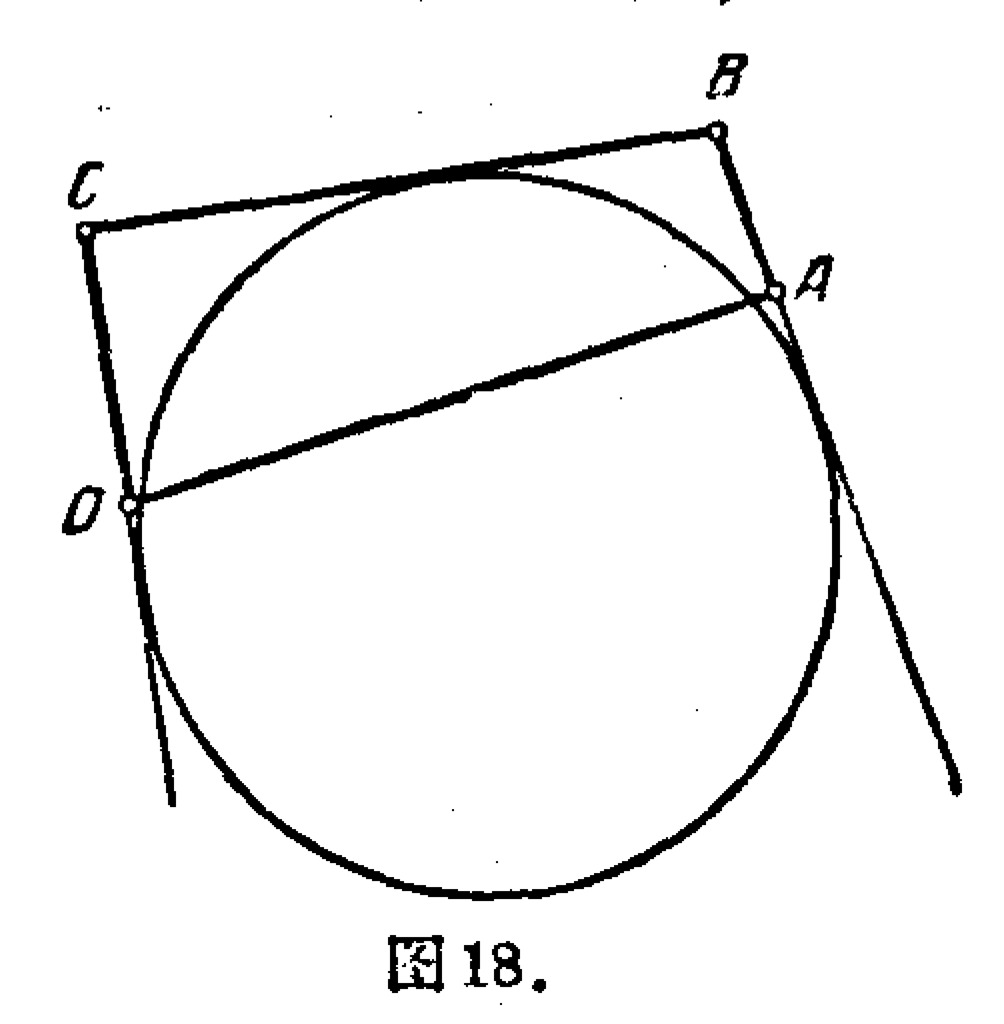


图18.

置：首先必須証明**圓的切点是在点 A 和 B 之間**。假使点 A 和 D 有图18那样的位置，那末对它們就不能作出証明中引用的推論。可以証明切点必定在 A 和 B、C 和 D 之間，但是这样就会引起相当長的推論，所以最好还是利用我們以前指出的那个証明（見第21頁）。

这样看来，对于我們的問題"証明必須滿足哪些条件，它才是正确的，也就是才能保証被証明的命題的正确性"，我們应該这样来回答：

（一）証明应該只根据正确的命題，也就是根据公理和以前証明过的定理。

（二）所有構成証明的推理应該是結構正确的。

（三）必須时刻注意証明的目的——确定被証明的命題的正确性，不讓某些其他的东西暗中頂替了这个命題①。

9. 因为有必要遵守这些要求，自然就发生这样一个問題：究竟怎样来寻求正确的証明呢？

对于解决这个問題，我們来提出一些意見。首先，当我們拿到某个几何学命題要加以証明时，应該十分明确地把基本思想区分出来，这思想应該就是証明的对象。往往这思想表达得不够明显。例如，我們有这样一个命題："試証明，順次联

① 这一点是从第28-29頁上的例子得到的。

結四边形各边的中点，我們就可以得到一个平行四边形。”我們能够拿什么来証明得到的确是平行四边形呢？为了回答这个問題，我們記起了平行四边形的定义：平行四边形是对边兩兩平行的四边形。这就是說，我們要証明得到的綫段是兩兩平行的。

在区分出应当証明的命题以后，应該从所給定理中区分出文句里給出的、对証明是必不可少的那些条件。在所举的例子里提到，順次联結四边形各边的中点，——这就是說，在四边形各边上，取把边分成相等兩部分的各点。

我們把所有这些記成象学生做練习題时通常采用的形式，归結在“已知”和“求証”这兩項之下。这样，在我們这个例子里，假使我們有四边形 $ABCD$（图 19），M、N、P、Q 是四边的中点，那末我們就可以把这条定理記成：

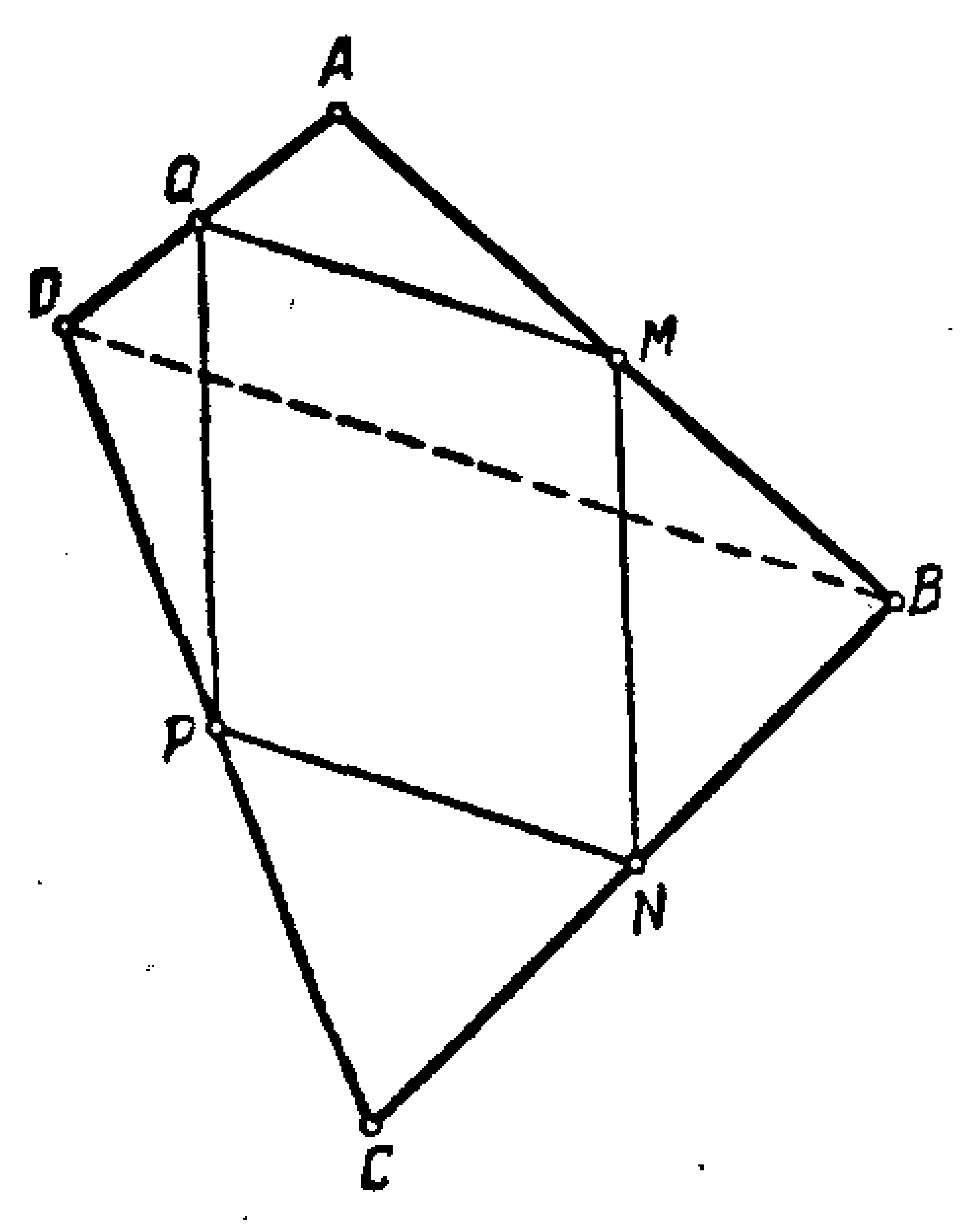


图 19.

已知：在四边形 $ABCD$ 里，$MA=MB, NB=NC, PC=PD, QD=QA$。

求証：$MN \parallel PQ, MQ \parallel NP$。

在这样記下以后，就进行定理的証明。証明时，我們应該利用以前确立的公理和定理，同时应該利用在定理条件中指出的那些特殊关系（这点要特别牢記）。

10. 但是，怎样去找那些把要証明的命题跟以前确立的

眞理和定理的条件联結起来的推理順序呢？怎样从大量各式各样的命題中，挑选出能帮助我們証明我們的定理的命題呢？

我們寻找时，最合理是从要求証明的命題出发，提出这样一个問題：哪个命題的結果可以得到要求証明的命題？如果找到了这样的命題，并且它还是条件和以前証明过的定理的結果，那末我們的問題就解决了。如果找到的命題不是这样，那末我們就对这个新命題重新提出同样的問題，往下类推。这样的思考方法在科学上就叫做**分析**。

在我們研究的四边形的例子里，我們要証明几个綫段的平行关系。同时我們記得，这些綫段是联結四边形各边中点的。明确了这一点，我們就自問：在以前証明过的命題里，有沒有討論到关于联結多边形各边中点的綫段的平行关系的呢？关于三角形均綫的定理就是一个这样的命題，它說，联結三角形兩边中点的綫段平行于第三边并且等于它的一半。但是在現在研究的图形里并沒有这样的三角形。然而这样的三角形不难在这个图形里構成。例如，作对角綫 BD。这时候我們立刻得到兩个三角形——ABD 和 BCD，綫段 MQ 和 NP 就是它們的均綫。可見，$MQ \parallel BD$ 和 $NP \parallel BD$；因而 $NP \parallel MQ$。作另一条对角綫，我們用类似的方法就可以証明 $MN \parallel PQ$。但是第二次構成这样的三角形是不必要的，因为从第一对三角形我們就有 $MQ=\frac{1}{2}BD$ 和 $NP=\frac{1}{2}BD$；因而 $MQ=NP$，这就是說，四边形 $MNPQ$ 的对边 MQ 和 NP 不仅平行而且相等，从这里可以直接推出，这个四边形是一个平行四边形。

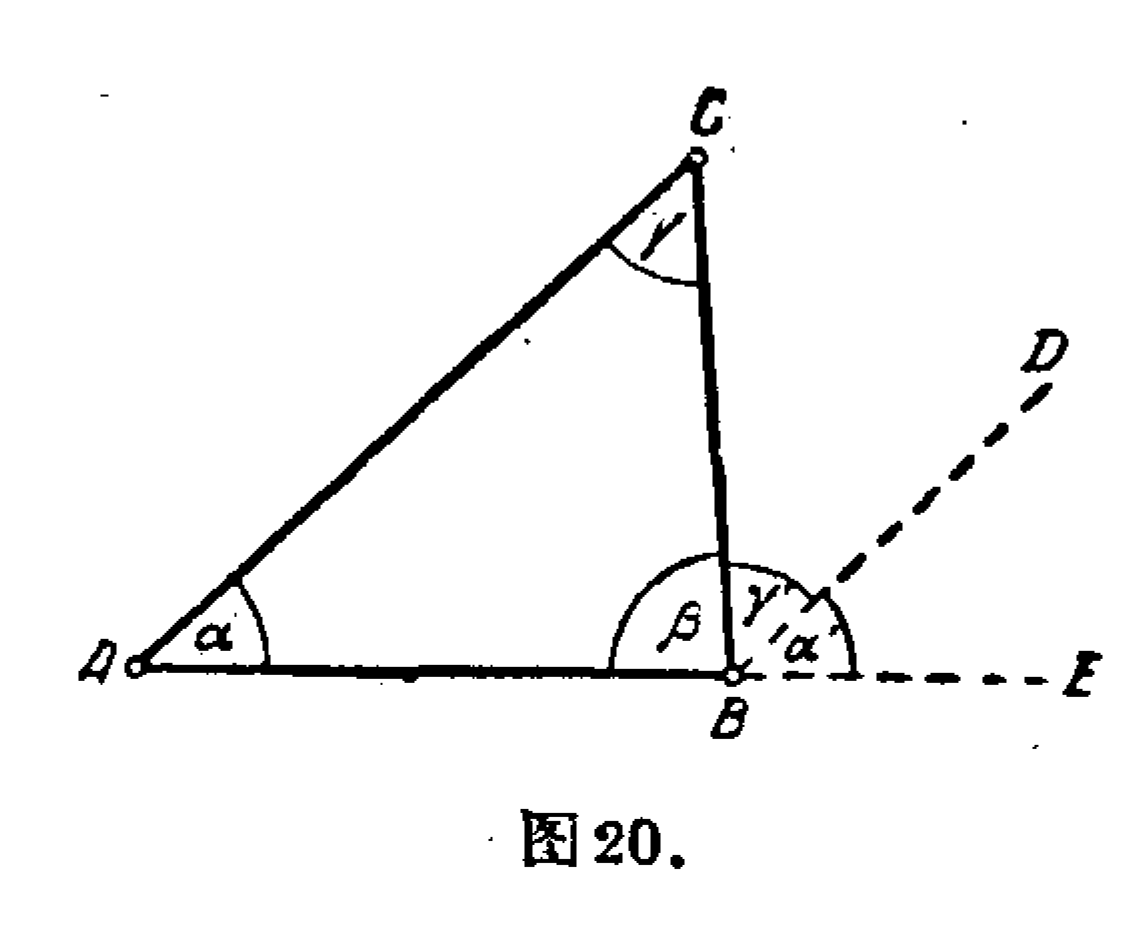


图 20.

我們用关于三角形內角的和的著名定理来作第二个例子．这里，在定理的文句里不包含任何特殊条件，因此应該仅仅記成，求証：在 $\triangle ABC$（图 20）內，$\alpha+\beta+\gamma=180°$．

从要求証明的命題的內容，可以看出，我們必須作出三角形三內角的和．最合适的是就在原来的图上作出．我們在角 β 的頂点 B 作出角 $\gamma'=\gamma$．这时候，角 γ' 的一边 BD，根据在截綫 BC 通过时兩內錯角相等，必和 AC 平行．过 B 点延長边 AB，得到 $\angle DBE$，用 α' 来表示它．α' 和 α 是兩平行綫 AC、BD 和截綫 AB 所構成的同位角，所以 $\alpha'=\alpha$．于是我們有：$\alpha'+\beta+\gamma'=180°$，因为这些角共同構成一平角．由于角的等式 $\alpha'=\alpha$，$\gamma'=\gamma$，我們就得到要求証明的关系

$$\alpha+\beta+\gamma=180°.$$

在所举的兩个例子里，我們都相当快地找到了要求的关系．但是也常有这样的情况，利用了一系列輔助的命題，关系才被确定．这时候，分析就变得比較長而复杂了．

11．举一个比較复杂的分析的例子．求証下面的命題：**如果作一圓外接于一三角形，并从圓上任意一点作三角形三边的垂綫，那末它們的垂足在同一直綫上（西姆松綫）．**

我們来进行分析．設 ABC 是所設的三角形（图 21），M 是外接圓上的一点，N、P、Q 是該点在三角形三边 BC、CA、

AB 上相应的投影．要求証明，N、P 和 Q 是在同一直綫上．考虑到点 N、P、Q 在同一直綫的条件和角 NPQ 是平角是等价的，我們就可以写下要証明的命題了．因而，我們有：

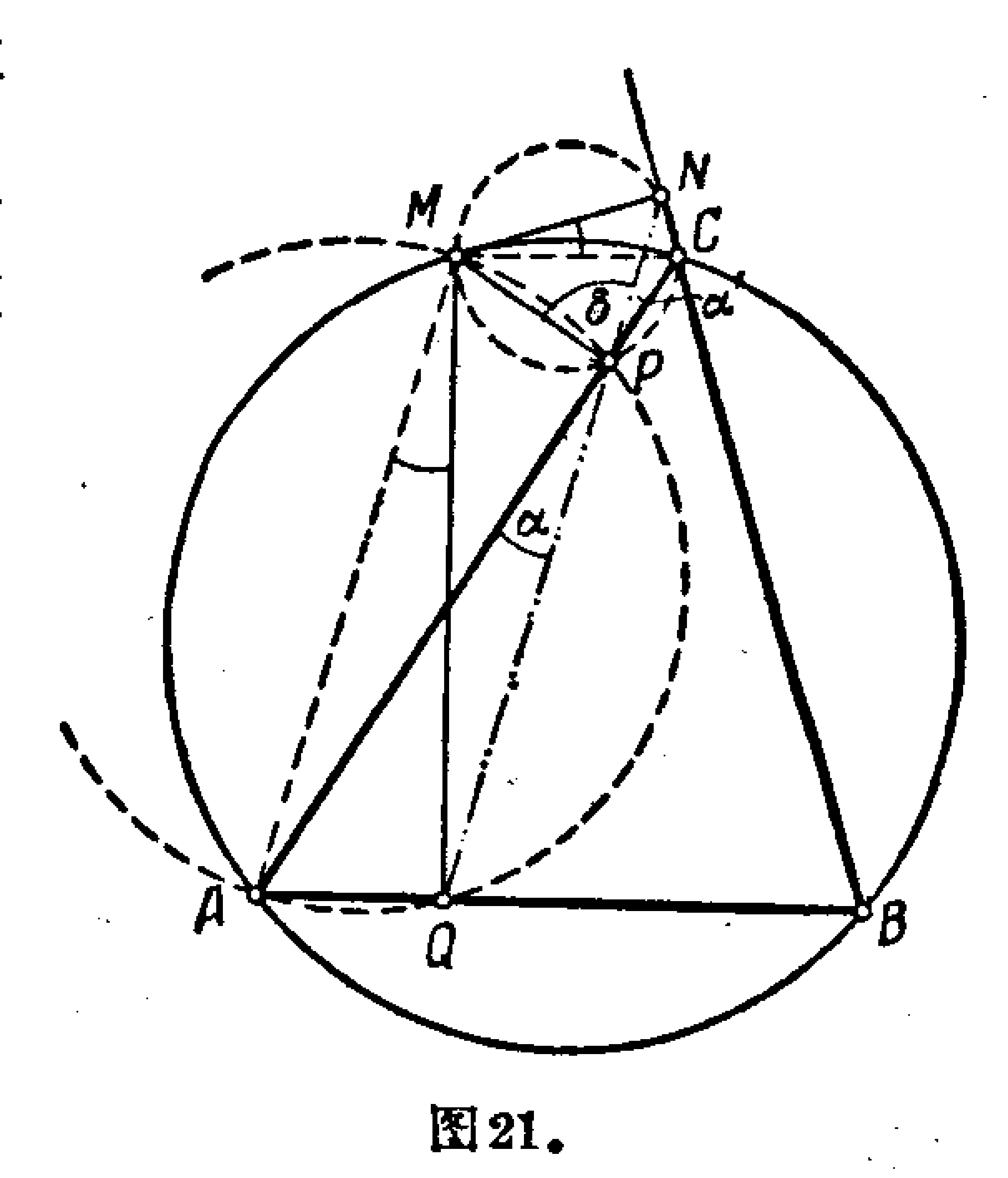


图21.

已知：$MN \perp BC$，$MP \perp CA$，$MQ \perp AB$；M 是 $\triangle ABC$ 的外接圓上的点．

求証：$\angle NPQ = 180°$．

分析角 NPQ，我們看到它是由 $\angle MPN = \delta$，$\angle MPA = 90°$ 和 $\angle APQ = \alpha$ 構成的．如果我們成功地証明了 $\angle NPQ = \delta + 90° + \alpha = 180°$，那末这个命題也就証明了．要达到这个目的，我們只要証明 $\alpha + \delta = 90°$ 就够了．我們来研究 $\angle CPN = \alpha'$．因为 $\angle MPC = 90°$，所以也就是 $\alpha' + \delta = 90°$．因而如果我們成功地証明了 $\alpha' = \alpha$，那末定理也就証明了．我們研究一些新的、对它們能够用得上定理条件的角，来設法建立需要的等式．直角 $\angle APM$ 和 $\angle AQM$ 都对着綫段 AM，所以用 AM 当直徑作出的圓必定通过 P 和 Q．按圓周角的性質，$\angle AMQ = \angle APQ = \alpha$．类似地，用 MC 当直徑作圓，我們看到，它通过 P 和 N；按圓周角的性質，$\angle CMN = \angle CPN = \alpha'$．現在我們設法証明 $\angle AMQ = \angle CMN$．我們注意到，四边形 $ABCM$ 是內接四边形，所以它对角的和等于 $180°$；

$$\left.\begin{aligned} &\angle AMC+\angle B=180^\circ, \\ \text{或}\qquad &\angle AMQ+\angle QMC+\angle B=180^\circ. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

另一方面，在四边形 $BQMN$ 內，点 Q 处和点 N 处的角是直角，所以其余兩角的和等于 180°：

$$\left.\begin{aligned} &\angle QMN+\angle B=180^\circ, \\ \text{或}\qquad &\angle QMC+\angle CMN+\angle B=180^\circ. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

比較等式(1)和(2)，就得到：

$$\angle QMC+\angle CMN+\angle B=\angle AMQ+\angle QMC+\angle B,$$

由此得 $$\angle CMN=\angle AMQ,$$

也就是 $$\alpha'=\alpha.$$

象我們已經看到的，从这里就可以推出，$\alpha+\delta=90^\circ$，$\alpha+\delta+90^\circ=180^\circ$，最后，$\angle NPQ=180^\circ$。

如果我們要順序地叙述証明过程，那就不得不走相反的道路：首先我們証明，$\angle AMQ=\angle CMN$，进一步建立等式

$$\angle AMQ=\angle APQ \text{ 和 } \angle CMN=\angle CPN.$$

最后，由于 $\angle CPA=\angle CPN+\angle MPN+90^\circ=180^\circ$，我們得到 $\angle NPQ=\angle MPN+90^\circ+\angle APQ=180^\circ$，也就是点 N、P 和 Q 是在同一直綫上。

这个和分析相反的叙述証明方法，在課本上或在課堂上証明定理时通常采用，叫做**綜合法**。用綜合法叙述証明比較簡單而且自然，但是不应該忘記，在**寻找**証明时，我們不可避免地要采用分析法。

可見，分析和綜合——同一过程的兩个不可分割的阶段——構成了所給定理的証明。分析是寻找証明的方法，綜

合是叙述証明的方法。

当然，在寻找某些命題的証明时，不是經常很容易找到需要的推理順序的。不是常常能立刻走上正确的道路的，有时不得不放棄原来拟定的方法而換用其他方法。

举一个例子。設我們要証明这个命題："如果三角形的兩条中綫相等，那末这个三角形是等腰三角形。"在已知$\triangle ABC$內，中綫AM和BN相等。起初可能覺得研究一下三角形ABM和ABN并証明它們全等是合适的。但是不难看到，对于这样的証明我們沒有足够的根据：我們只知道$AM=BN$，以及这兩个三角形的边AB是公有的。既沒有給我們角的等式，也沒有給我們第三对边的等式。所以不得不放棄这样的道路。恰恰一样，我們也确信，研究三角形ACM和BCN是沒有意义的，因为对于証明这兩个三角形全等，我們也缺少根据。放棄对这些三角形的研究，我們来寻求新的途徑。把兩条中綫的交点記作P，我們来研究三角形ANP和BMP。由于兩条中綫是相等的，并且点P处在每一条中綫的三分之一地方，就得到$PN=PM, PA=PB$，以及$\angle APN=\angle BPM$，因为它們是对頂角。因而$\triangle ANP=\triangle BMP$，也就是$AN=BM$。又因为这些綫段是相应的边的一半，所以$AC=BC$，这就是要証明的。

善于进行分析并独立地寻求証明，要通过多次練习才能做到，因此必須系統地解証明題。

12. 在結束这一部分时，我們轉而注意到，証明定理可以用兩种方法——直接方法和間接方法。

在直接証明的情况，我們在这命題和以前証明的命題之間建立起直接的联系，来断定要求証明的命題的正确性。

在非直接（間接）証明的情况，我們安排如下：怀疑要求証明的命題的正确性并把它看作是錯的，但是我們得到了和条件或和以前証明过的命題相矛盾的結果。所以間接証明也叫做反証法或归謬法。

在前面的說明里，我們主要采用直接証明。現在来举几个反証法的例子。

我們举三角形全等的第三个判定定理的証明来作第一个例子。在課本里指出，用重合法証明这条定理是不方便的，因为我們对于角的相等性一无所知。但是，采用反証法，它就可以用重合法来証明了。

設 ABC 和 $A'B'C'$ 是两个已知三角形（图 22），在它們里面，$BC=B'C'$，$CA=C'A'$，$AB=A'B'$。为了証明，我們把 $\triangle A'B'C'$ 移到 $\triangle ABC$ 上，使 $A'B'$ 和 AB 重合。因为我們对于角的相等性一无所知，所以我們不能断定点 C' 落在点 C 上。因此，我們假設点 C' 落在 C'' 上。联結 C 和 C''。$\triangle ACC''$ 是等腰的（根据条件 $AC''=AC$），$\triangle BCC''$ 也是等腰的（根据条件 $BC''=BC$）。等腰三角形 ACC'' 的高 AM 通过 CC'' 边的中点 M（因为等腰三角形的高和中綫重合）。等腰三角形 BCC'' 的高 BM 也通过 CC'' 边的中点 M。

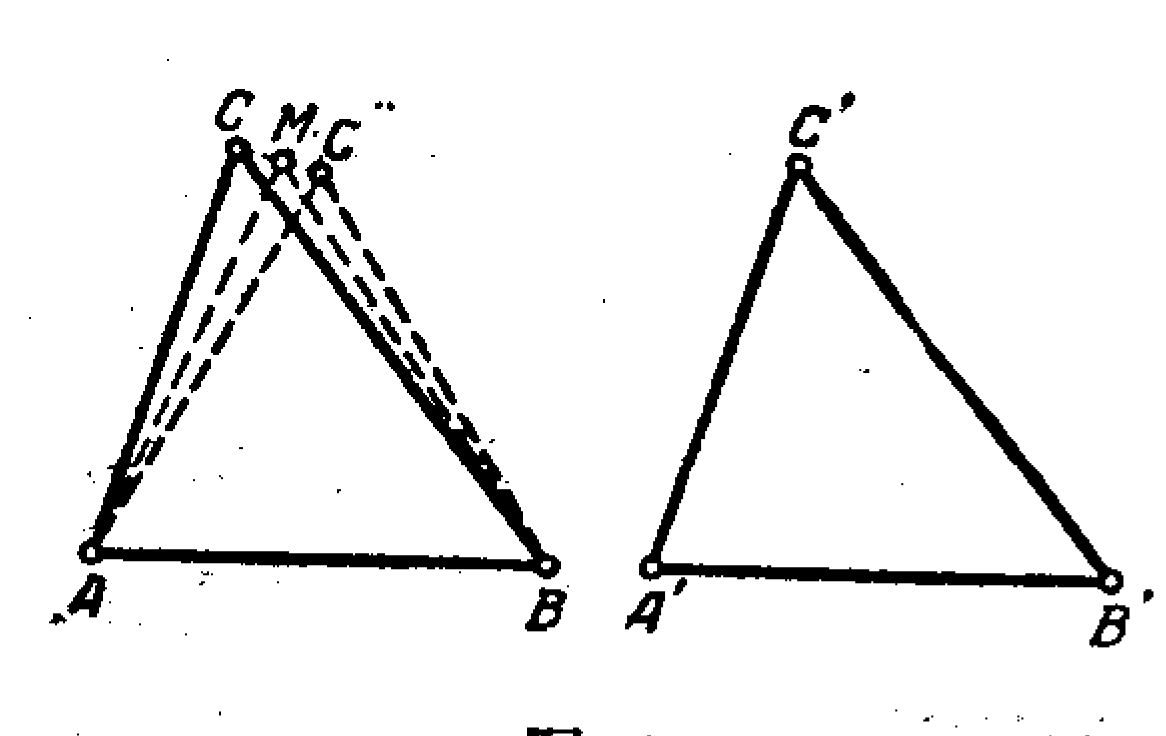


图 22.

于是我們得到，从一点 M 作出直綫 CC'' 的兩条垂綫——AM 和 BM。这兩条垂綫是不可能重合的，因为重合就表示 A、B 和 M 是在同一直綫上；但是由于点 C 和 C''（也就是整个綫段）处在直綫 AB 的同側，所以这是不可能的。

这样我們得到，如果假設 C 和 C' 不重合，結果从同一点 M 就作出直綫 CC'' 的兩条不同的垂綫。但是这和以前建立的垂綫的性質相矛盾。因而，在移置三角形时，点 C' 必須和点 C 重合，我們就得到，$\triangle ABC=\triangle A'B'C'$。

我們用以前提到过的那个命題来作第二个例子：如果三角形的兩条角的平分綫相等，那末这样的三角形是等腰的。

設我們有 $\triangle ABC$ 和它的兩条角的平分綫 AM 和 BN（图 23）。

記下定理。

已知：在 $\triangle ABC$ 內，$\angle CAM=\angle BAM$，$\angle CBN=\angle ABN$ 和 $AM=BN$。

求証：$AC=BC$。

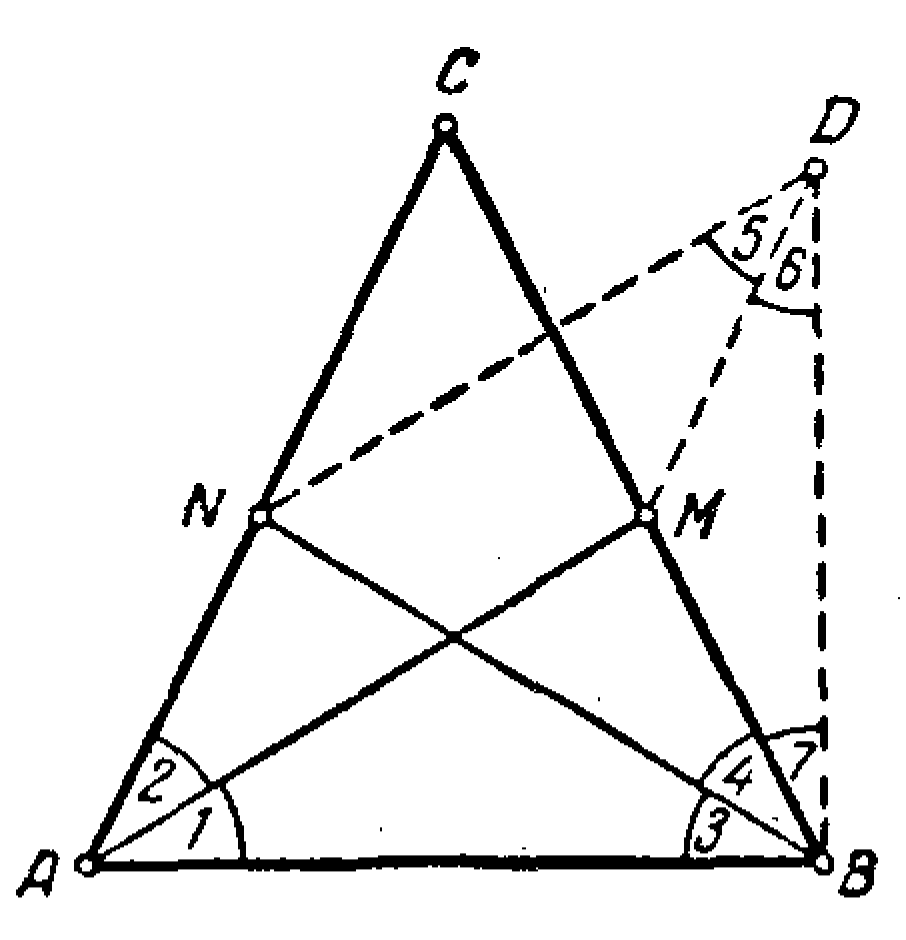


图 23.

我們用反証法进行証明。假設三角形是不等腰的，并且为了确定起見設 $AC>BC$。如果确是这样，那末 $\angle ABC>\angle CAB$。象图上那样把角标上号碼，就得到 $\angle 3>\angle 1$。現在来比較 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ABN$；AB 是它們的公共边，根据条件 $AM=BN$，而兩組等边間的夾角却不相等。因而大角对大边，也就是 $AN>BM$。現在通过点 N 作綫段 ND，和 AM 相

等且平行．这时候四边形 $AMDN$ 是一个平行四边形，也就是說，$MD=AN$，$\angle 5=\angle 2$．联結 B 和 D，得到 $\triangle BDN$，它是一个等腰三角形，因为 $ND=AM=BN$．另一方面，在 $\triangle BDM$ 內，边 $MD=AN$；但是 $AN>BM$，因此 $MD>BM$，由此 $\angle 7>\angle 6$．同时 $\angle 4>\angle 5$，因为 $\angle 5=\angle 2=\angle 1$，而 $\angle 4=\angle 3$，但 $\angle 3>\angle 1$．如果把不等式 $\angle 7>\angle 6$ 和 $\angle 4>\angle 5$ 逐項相加，就得到：$\angle 4+\angle 7>\angle 5+\angle 6$，也就是 $\angle DBN>\angle BDN$．我們得到，等腰三角形 BDN 的兩底角不等．得到的矛盾迫使我們放棄 $AC>BC$ 的假設．相仿地，我們能够推翻 $BC>AC$ 的假設．因此 $AC=BC$．

所举的例子足够清楚地說明了反証法的特性．当寻找論据时发現直接証明有困难，有时甚至不可能找到，通常就采用这种間接証明．

在这种情况，采取和要求証明的命題相反的命題，并且竭力找到这样的推理順序，它可以推导出一个和以前建立起来的命題显然矛盾的命題．在最后兩个例子里，我們就得到了显然矛盾的命題：在第一种情况，我們得到，过一点可以作某直綫的兩条垂綫；在第二种情况，我們得到，等腰三角形的兩底角不等．

四　几何学的哪些命題可以不加証明地采用？

1．現在我們来回答引言里提出的最后一个問題：几何学

上有哪些命題可以不加証明地采用？

乍一看这問題似乎十分簡單。人人都会說，可以不加証明地采用的是公理，而公理应該是选擇出来的、已被多次証实且不会引起任何怀疑的、正确的命題。但是，当我們实际上試选合适的命題时，就会发現，这工作做起来并不这样簡單。

現在大家已經知道了大量几何学命題，它們經常受到实踐考驗，恐怕已經很少有人会怀疑它們的正确性了。但是，当然决不能由此得出結論，認为所有这些命題都应該看作公理。对我們来說无可怀疑的命題，例如：过兩点可以作唯一的直綫；过一已知点可以引一条而且只可以引一条直綫垂直于某一直綫；三角形兩边的和大于第三边；和同一条第三綫段相等的兩綫段相等；平行綫之間的距离处处相等；等等。显然，象这样的命題数目还可以增加好几倍。为什么不把所有这些类似的命題都当作公理呢？要知道，如果这样做，几何学的叙述就会大大簡化，很多証明就会显得不必要，还有其他等等。

但是几何学的发展并不沿着这条道路；相反地，几何学一开始就竭力使公理的数目尽可能地少，而几何学的所有其他內容都从这些为数不多的眞理用演繹方法推导出来。

人們究竟为什么恰恰选擇这条比較困难、复杂得多的道路，来構成几何学知識的体系呢？

从尽可能少的公理出发構成几何学，这种傾向是由一系列原因引起的。首先，公理数目減少，每一条公理的意义自然就增大：別忘了，要知道这些公理应該包含着全部未来的几何学，未来的几何学应該从它們推导出来。因此，公理越少，每

一条公理就將揭示出空間形体的越普遍、越深刻而且越重要的性質。

促使我們尽可能減少公理数目的另一个主要原因就是：在公理較少的情况，考驗它們的正确性，檢查全部公理提出的条件是否滿足(这点以后我們將說到)，都要容易得多。

2. 这样，我們面前就摆着一項任务：选取尽可能少的、基本的、最普遍而重要的几何学命題，把它們当作公理。在选擇时我們遵循什么原則呢？首先我們应該記住，不可以輪流地一条一条地分析公理，而不管它和其他公理的联系。我們应該采取的，不是一条孤立的公理，而是**公理的完整体系**，因为只有这样的体系才能正确地反映出物質世界基本空間形体的实际存在的性質和相互关系。

当然，能够包含在这样的体系中的只是經过无数次考驗的、反映了空間形体的最普遍最基本規律的眞理。

进一步說，选取这样的公理体系时，我們应該檢查一下，使它里面不包含和其他命題相互矛盾的命題，因为这样的命題是不可能同时成立的。比如說，在一个体系里不可能同时有这样兩条公理："过一已知点可以作唯一的一条直綫垂直于某一直綫"和"过一已知点决不可能作一直綫和一已知直綫平行"。

此外，不但公理不应該相互矛盾，而且在公理的推論中也不应該有兩个相互矛盾的命題。这个对公理体系提出的基本要求叫做**相容性条件**。

但是和相容性条件同时，我們也应該注意：凡是可以根据

其余公理加以証明的命题，都不能包括进我們的公理体系。这个要求是十分明显的，只要我們記得，我們要竭力使体系成最小，也就是使它只包含最少数的不用証明的命题。要知道，如果所給的命题可以用其他公理来証明，那末它已經不是公理而是定理了，已經沒有必要把它归入公理体系了。使公理不能用其他公理加以証明的要求叫做**独立性条件**。

但是竭力使我們的公理体系尽可能地小，我們也不应該陷入极端，不应該从我們的体系中去掉在叙述几何学时必須依靠的命题。

这是公理体系应該滿足的第三个条件——**体系的完备性条件**。更确切些說，这个条件可以这样来表达：如果体系是**不完备的**，那末对它就經常可能加入新的命题（当然，这些命题和其余的公理一样也含有最基本的概念），这些新的命题將不依賴于其余的定理，也不和它們矛盾。如果公理体系是**完备的**，那末加入这体系、并含有和公理涉及的相同概念的任何新的命题，就或者是这些公理的推論，或者和它們相矛盾。

3. 为了更加明显地想象公理体系的完备性、独立性和相容性諸条件，可以举一个簡單的例子，虽然这个例子不是几何关系的确切反映，但是它提供了相当好的几何关系的比拟。

我們来研究一个含有三个未知数的一次方程組。把方程組里每一个未知数看作具有一定意义的"概念"，把每个方程看作用来确定这些"概念"之間关系的某一类"公理"。

这样，設我們有方程組

$$2x-y-2z=3,$$

$$x+y+4z=6.$$

能不能由这个方程組来确定未知数 x、y 和 z 呢？不能，因为在这里方程的个数少于未知数的个数。这个方程組沒有滿足**完备性**条件。

現在我們設法修正这个方程組，再补充一个方程：

$$2x-y-2z=3,$$
$$x+y+4z=6,$$
$$3x+3y+12z=18.$$

仔細地研究了得到的方程組，我們断定，新方程的引入幷沒有改变这种情况，因为第三个方程是第二个方程的簡單推論，幷沒有提供新的关系。在这个方程組里違反了**独立性条件**。

我們現在改变第三个方程，来研究这样的方程組：

$$2x-y-2z=3,$$
$$x+y+4z=6,$$
$$3x+3y+12z=15.$$

也不难断定，这个方程組对于确定未知数也沒有用。

实际上，把最后一个方程除以 3，我們就得到

$$x+y+4z=5.$$

而第二个方程却告訴我們：

$$x+y+4z=6.$$

这兩个方程里究竟应該相信哪一个呢？显然，我們碰到的是**矛盾**的方程組，从它也不能确定未知数。

最后，如果我們研究方程組

$$2x-y-2z=3,$$

$$x+y+4z=6,$$

$$2x+y+5z=8,$$

那末很容易判断，这个方程組有唯一的解答 ($x=5, y=13, z=-3$)，它是相容的、独立的和完备的。如果对方程組再硬加上和 x、y 和 z 有关的第四个方程，那末它或者是三个已知方程的推論，或者就和它們相互矛盾。

4. 从这里我們看到，选擇作为几何学基础的公理决不是随便的，而是要滿足十分严格的要求的。确定必不可少的几何学公理体系的工作还在上个世紀末叶就开始了，虽然学者們在这方面已經做得很多，但是即使現在也还不能認为已經彻底完成。問題就在对于現有的公理体系进行系統修改时，学者們有时会发現在这体系里有多余的也就是"依賴的"公理，它們是更簡單、更普遍的公理的推論，因此較复杂、含有較多条件的命題就要用含有較少条件的公理来代替了。所有这些研究对科学有很大意义，因为它們的目的就是在弄清楚，决定几何学全部内容的是空間形体的哪些最普遍、最深刻和最重要的性質。

为了提出有关現代几何学的公理体系的某些概念，我們先来看看中学几何学里的叙述，并且研究一下，它是建立在哪些公理上的，它还缺少哪些公理。这里我們只限于平面几何的公理。

中学几何課程里的叙述是从弄清楚几何学的一些基本概念——体、面、綫、点开始的。下一步就是从所有的綫里区分

出直綫，从所有的面里区分出平面来。中学課程里最前面的一些公理是确定点、直綫和平面之間的关系的。这些公理屬于**关联公理**——几何学公理的完备体系中的第一組。

这一組公理确定，基本的几何形狀怎样互相关联：用几点决定一直綫和一平面，在什么条件下直綫在某一平面上，等等。

关联公理組的公理，在中学課程里只提到兩条：

(1)**过兩点可以引一条直綫，并且只可能引一条直綫。**

(2)**如果一直綫有兩点在一平面上，那末这条直綫就全部在这个平面上。**

同时我們經常自覚或不自覚地采用另外一些关联公理，其中作为平面几何学論据的还需要下述兩条：

(3)**每一条直綫至少有兩点。**象我們見到的，这条公理包含的要求十分狹窄。但是用次序公理，就可以証明直綫上有无窮多个点。

(4)**一平面至少有不在同一直綫上的三个点。**这条公理也只包含最少的要求，但是根据这条公理进一步可以証明一平面上有无窮多个点。

5. 我們轉向第二組公理，这在中学課程里是完全沒有的，虽然每一步都不得不用到它們。第二組公理叫做**次序公理**。这些公理描写了直綫上各点間相互位置和平面上点和直綫間相互位置所服从的規律。我們經常在应用这些公理，虽然方式是不明显的。比如說，我們要延長一綫段，那末我們就这样做了，这是因为我們知道，綫段永远可以从兩头延長的。

如果我們联結处在一直綫异側的兩点，那末我們确信，得到的綫段一定和这条直綫相交。例如，在証明兩边一角相等的兩三角形全等的命題时，我們就依据了这点（見图13）。还有一个例子：我們相信，三角形某一內角的平分綫必定和这个角的对边相交。

无可怀疑，在所有这些情况，我們碰到的事实是十分明显的，然而要知道，它們正說明几何图形存在某些基本性質，这些性質我們經常要用到，所以必須在公理中叙述。

决定直綫上点的分布的公理是和基本概念“在前”和“在后”相联系的，它們表达如下：

(1)在同一直綫上的兩点，可以把任何一点当作在前的点，这时候第二点就是在后的点。

(2)如果 A、B、C 是同一直綫上的三点，并且 A 在 B 的前面，B 在 C 的前面，那末 A 就在 C 的前面。

这兩条公理已經足够清楚地区分出直綫的特性，这些特性不是所有的綫都具有的。比如說，取一圓，按顺时針方向在圓上运动，顺次取 A、B、C 三点；这样我們就断定，在圓上，点 A 在点 B 前面，点 B 在点 C 前面，而点 C 却又在点 A 的前面（图24）了。在直綫上按上面指出的 A、B 和 C 三点的位置，我們說，B 在 A 和 C 之間（图25）。

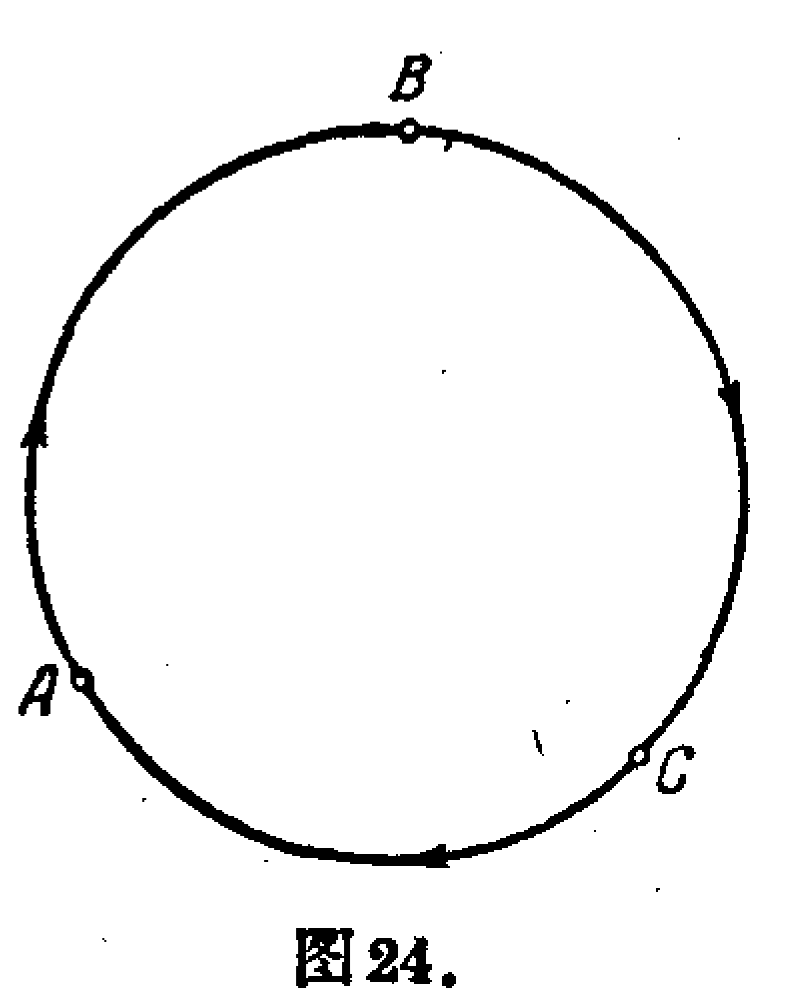


图24.

(3)直綫上，兩点之間永远有这条直綫的第三点存在。

图25.

連續地把这条公理应用于直綫上的兩点（根据关联公理第二条，它們是存在的），然后应用于每条得到的綫段，我們就得到，直綫上兩点間存在着这条直綫的无穷多个点。

直綫上兩点和它們之間所有的点所屬的一部分直綫叫做**綫段**。

(4)对直綫上的每一点来說，一定有在它前面的点，也有在它后面的点。

从这条公理得出直綫段可以向兩方面延長的性質。从这里就推出，直綫上沒有在所有其余的点前面的点，也沒有在所有其余的点后面的点，这就是說，**直綫是沒有端点的**。

含有某一已知点和全部在它前面的点的部分直綫，或者含有某一已知点和全部在它后面的点的部分直綫，叫做**射綫**或**半直綫**。

平面上点和直綫的相互位置是由下面一条公理叫做"巴士公理"决定的，这条公理是用最先表达它的德国数学家巴士来命名的：

(5)如果已知不在同一直綫上的三点，那末在这个平面內不通过这三点但和由这些点决定的綫段之一相交的直綫，必定还和另一綫段且只和一綫段相交(图26)。

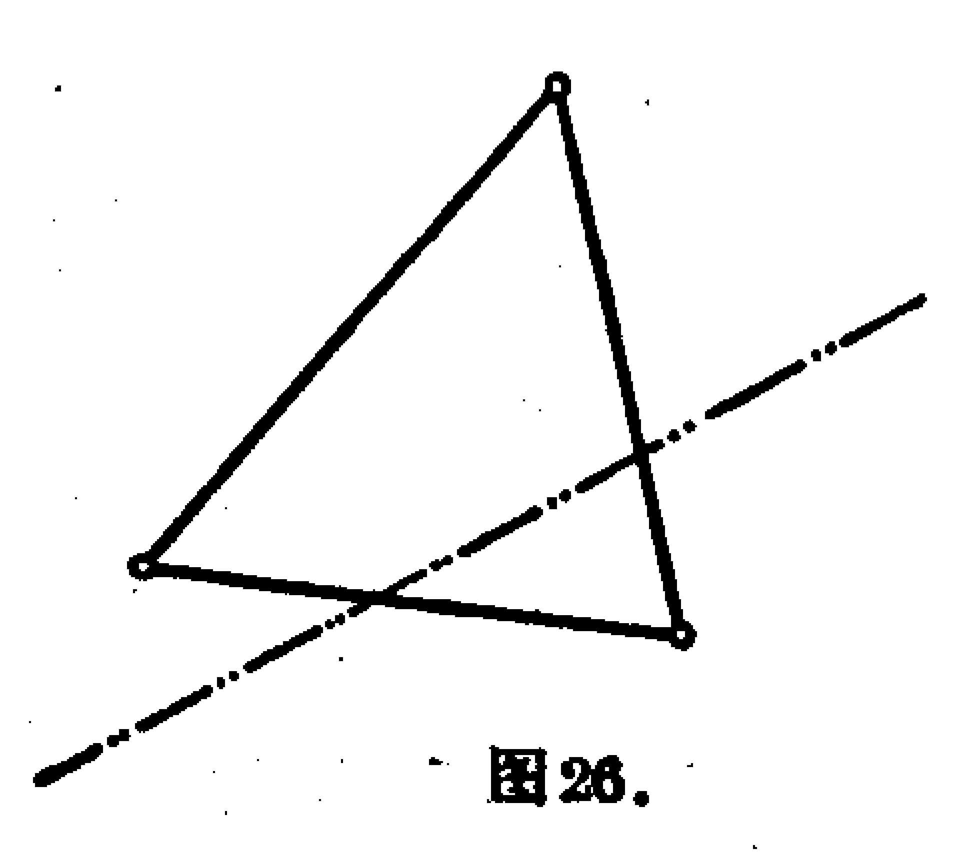


图26.

我們用这条公理来証明关于用直綫把平面分成兩个半平面的

定理．引进这条定理的証明，来当作仅仅根据公理和已經証明的命題作出严格証明的一个例子．我們把定理表达成下列形式．

处在一个平面內的任一直綫，把平面上所有不屬于这条直綫的点分成兩类，情况是这样的：屬于同一类的兩点决定的綫段不和这条直綫相交，屬于不同类的兩点决定的綫段和这条直綫相交．

在証明时为了書写簡略起見，我們將采用某些專門符号，必須記住．

$\subset$是**屬于**的符号：$A \subset a$ 就是"A 点屬于直綫 a"．$\times$是**相交**的符号：$AB \times a$ 就是"綫段 AB 和直綫 a 相交"．某个关系式上面的一横表示它的**否定**：$\overline{A \subset a}$ 就是"A 点不屬于直綫 a"．$\therefore$是**結論**的符号，意思是"所以……"．規定了这些，我們就来証明定理了．首先我們注意到，**如果三点在同一直綫上，那末对它們来說就有和巴士公理相似的命題成立：和这三点决定的三綫段之一相交的直綫，必定还和另一綫段且只能和一綫段相交．**这个命題很容易根据直綫上点的分布的公理証明．

实际上，如果点 A、B 和 C 在同一直綫上，并且 B 在 A 和 C 之間，那末綫段 AB 和 BC 的所有的点都屬于綫段 AC，而綫段 AC 的每一点(除了 B)不屬于 AB，就屬于 BC．所以和 AB 或 BC 相交的直綫一定也和 AC 相交，而和 AC 相交的直綫或者和 AB 相交，或者和 BC 相交．

現在假定我們在平面上有直綫 l．我們应該証明：

(1)用直綫 l,可以把平面上不屬于这条直綫的点分类.

(2)类别可能是而且只可能是兩类.

(3)这兩类具有定理中指出的性質.

为了确定这些情况,我們在直綫l外取一点 A(图 27),并采取下述条件:

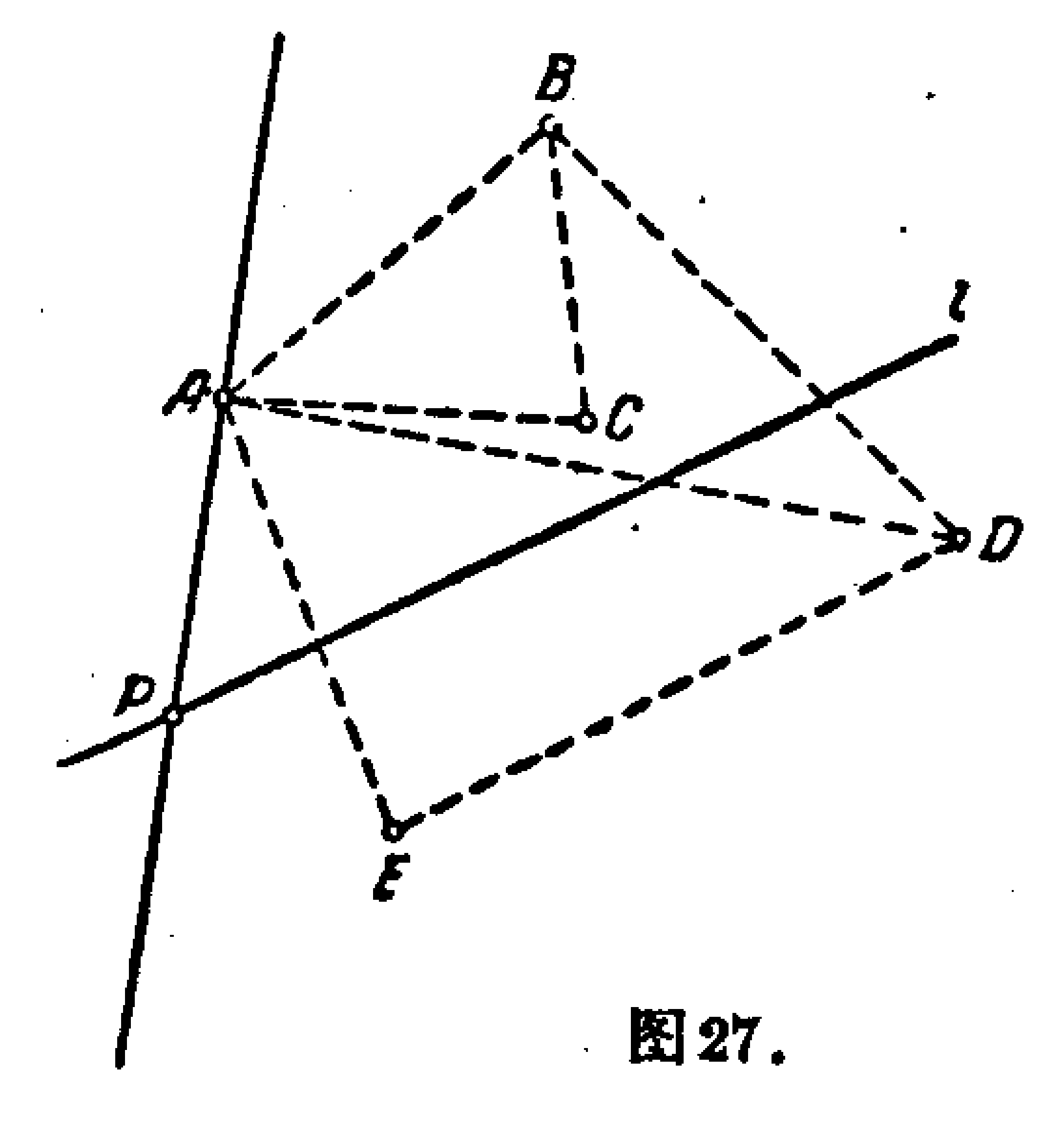


图27.

(一) A 点屬于第一类(用 K_1 来表示);

(二)如果不屬于 l 的一点和A点决定的綫段不和l相交,那末这一点屬于第一类;

(三)如果不屬于 l 的一点和 A 点决定的綫段和 l 相交,那末这一点屬于第二类(用 K_2 来表示).

很容易相信,的确存在着这样兩类的点。我們在直綫 l 上取一点 P,引直綫 PA. 从頂点 P 发出的含有点 A 的射綫只包含第一类的点,因为交点 P 处在点 A 和射綫上其余的点确定的綫段外。从同一頂点发出的相反的射綫只包含第二类的点,因为交点 P 处在点 A 和这射綫上的点确定的所有綫段內。联結点 A 和直綫 l 上的任意点,我們就得到无穷多条包含第一类和第二类点的直綫.

类别只可能有兩种,因为对于联結点 A 和不屬于 l 的点的任一綫段,我們只能說出兩个命題:綫段和 l 或者相交,或者不相交——不可能有任何第三种情况.

最后我們指出,类别 K_1 和 K_2 滿足定理的条件。我們来

研究下列情形:

(1)兩点都屬于第一类:$B\subset K_1$,$C\subset K_1$。因为$B\subset K_1$,所以$\overline{AB\times l}$;因为$C\subset K_1$,所以$\overline{AC\times l}$。∴根据巴士公理$\overline{BC\times l}$。

(2)兩点都屬于第二类:$D\subset K_2$和$E\subset K_2$。因为$D\subset K_2$,所以$AD\times l$;因为$E\subset K_2$,所以$AE\times l$。∴根据巴士公理$\overline{DE\times l}$。

(3)兩点屬于不同的类别:$B\subset K_1$;$D\subset K_2$。因为$B\subset K_1$,所以$\overline{AB\times l}$;因为$D\subset K_2$,所以$AD\times l$。∴根据巴士公理$BD\times l$。

定理証明了。

包含同一类别的全部点的一部分平面,叫做**半平面**。

我們注意到,这条定理的証明可以完全不用图。图只是帮助我們注意推論的过程和記住得到的关系。这句話其实可以对任何足够严格的証明来說。

6. 下一組也就是第三組几何学公理,它和**全等**的概念有关。在中学几何課程里,平面图形的全等是用把一个图形迭合到另一图形上来确定的。

在几何課程里,对这个問題說明如下:"几何图形可以在空間移动而不改变它的形狀和大小。如果能够在空間移动兩几何图形之一,使它和第二个图形迭合在一起,也就是使兩个图形的所有各部分都重合,那末这兩个几何图形就叫做全等形。"

初初一看这个全等性的定义是十分明确的,但是如果仔

細地去分析它一下，就不难发現，在这定义里有邏輯的循环。实际上，为了确定图形的全等性，我們必須把它們重合；为了重合，我們必須在空間**移动**一图形，而且这图形在移动的过程中保持**不变**。但是“保持不变”是什么意思呢？这意思就是說，图形在整个时間里和它的原来形狀保持全等。这样，我們就得到，我們用移动“不变的图形”来定义“全等性”的概念，却又利用“全等性”的概念来定义“不变的图形”的概念。

所以利用关于綫段、角和三角形的全等性的那組公理来作为图形全等性的根据，要显得合理得多。

下面就是确定綫段相等性質的公理：

(1)**在一已知直綫上，从一已知点向已知方向可以取一綫段而且只可以取一綫段和已知綫段相等。**

(2)**每一綫段和它本身相等。如果第一个綫段和第二个綫段相等，那末第二个綫段也和第一个綫段相等。如果兩綫段和同一第三綫段相等，那末兩綫段也相等。**

(3)**如果** A、B **和** C **在同一直綫上，**A'、B'、C' **也在同一直綫上，并且** $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，**那末** $AC=A'C'$。

換句話說，就是：相等的綫段加上相等的綫段，它們的和也相等。

对于角来說，也有完全类似的公理。

(4)**靠着一已知射綫，在已知半平面內可以作一角而且只可以作一角和一已知角相等。**

(5)**每一个角和它本身相等。如果第一个角等于第二个角，那末第二个角也等于第一个角。如果兩个角和同一第三**

角相等，那末它們之間也相等。

(6)**如果** a、b、c **是从一公共頂点发出的射綫，**a'、b'、c'**是从另一公共頂点发出的射綫，并且** $\angle ab=\angle a'b'$，$\angle bc=\angle b'c'$，**那末** $\angle ac=\angle a'c'$。

換句話說，就是：相等的角加上相等的角，它們的和也相等。

最后，作为三角形全等性論据引进第三組的还有一条公理。

(7)**如果一个三角形的兩边和它們之間的夾角，和另一个三角形的兩边和它們之間的夾角对应相等，那末这兩个三角形的其余的角也对应相等。** 例如，如果我們有 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$，其中 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$ 和 $\angle A=\angle A'$，那末一定还有 $\angle B=\angle B'$ 和 $\angle C=\angle C'$。

根据这七条公理，首先証明三角形全等性的基本标志，进一步証明所有以这些标志为基础的关于图形全等性的定理。这样，就不必采用迭合的方法了，这方法已經变成多余的了。

我們举个例子来看看，怎样証明三角形全等性的第一种标志。

設已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$（图 28），其中 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$ 和 $\angle A=\angle A'$。要求証明三角形所有其余的元素也相等。按照公理 7，我們立刻得到了 $\angle B=\angle B'$ 和 $\angle C=\angle C'$。剩下来要証明的，是 BC

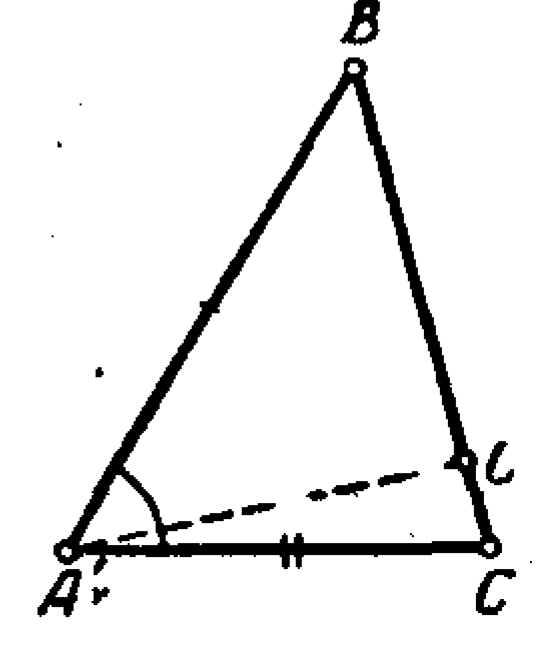


图 28.

$=B'C'$。我們假定 $BC \neq B'C'$。这样，在边 $B'C'$ 上就可以从点 B' 取 $B'C''=BC$。我們来研究 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C''$。它們有 $AB=A'B'$，$BC=B'C''$ 和 $\angle B=\angle B'$。这样根据公理 7 还有 $\angle B'A'C''=\angle A$。但是，和同一个第三角相等的兩角也相等，所以 $\angle B'A'C''=\angle B'A'C'$。我們得到，靠着射綫 $A'B'$ 在同一半平面內作了兩个不同的角和同一个角 A 相等，这跟公理 4 矛盾。于是，否定了 $BC \neq B'C'$ 的假定，我們就得到 $BC=B'C'$。

其余的关于图形全等性的定理，也可以用相似的方法来証明。

7. 初等几何学进一步講下去，就必須引入还有一組公理，就是**連續性公理**。直綫和圓相交以及圓和圓相交的問題，跟这組公理有密切的联系。用圓規和直尺的全部几何学作图，根据的正是这些問題。这情况指出了連續性公理的极度重要。此外，測量几何量的全部理論也建筑在連續性公理的基础上。

在連續性公理組里有以下兩条公理：

(1)阿基米德公理。**如果給定兩綫段，其中第一个綫段大于第二个綫段，那末把較小綫段重复相加足够次数，我們总可以得到总和大于較大綫段**. 簡單地說，如果 $\overline{a}$ 和 $\overline{b}$ 是兩个綫段，而且 $\overline{a}>\overline{b}$，那末存在这样的整数 n，使得 $n\overline{b}>\overline{a}$。

阿基米德公理收在标准教科書里，在关于綫段的度量一章里。用輾轉相除法寻找兩綫段公度的方法（我們在上面提到过），根据的就是阿基米德公理。实际上，在这方法里就是

用較小的綫段去分割較大的綫段，阿基米德公理使我們确信，这样分割下去，較小綫段的总和最后必將超过較大綫段.

我們可以从阿基米德公理直接作出結論：如果綫段$\overline{a}$大于綫段$\overline{b}$，那末总存在这样的整数n，使得$\frac{\overline{a}}{n}<\overline{b}$.

第二条連續性公理叫做康道尔公理或内函集結綫段公理. 它的內容是这样的：

(2) 如果有一系列綫段，其中后一綫段总在前一綫段內，并且在这系列綫段里，总可以找到小于一任意已知綫段的綫段，那末一定存在唯一的一点是在所有这些綫段內的.

为了說明康道尔公理的应用，我們来研究这样一个例子. 取綫段A_0B_0(图29)，把它的中点記做B_1，找出A_0B_1的中点，記做A_1. 进一步取A_1B_1的中点，記做B_2，并找出綫段A_1B_2的中点，記做A_2. 然后取A_2B_2的中点，記做B_3，并找出綫段A_2B_3的中点，記做A_3. 然后取A_3B_3的中点，等等①. 綫段A_0B_0、A_1B_1、A_2B_2、A_3B_3等等，是一系列的内函集結綫段. 实际上，每一个后面的綫段总在前面一个綫段內，并等于前面一个綫段的$\frac{1}{4}$. 这样，綫段A_1B_1的長等于$\frac{1}{4}A_0B_0$，$A_2B_2=\frac{1}{16}A_0B_0$，$A_3B_3=\frac{1}{64}A_0B_0$；……，一般地$A_nB_n=\frac{1}{4^n}A_0B_0$.

A_0 A_1 A_2 B_2 B_1 B_0 M

图29.

从阿基米德公理推出，得到的長度$\frac{1}{4^n}A_0B_0$在n足够大时可以小于任何已知綫段. 这样，公理的全部条件滿足了，并且存

① 綫段A_3B_3在图上已經画不下，不得不靠想象力了.

在着唯一的一点是在这系列的所有綫段內的。这个点不难指出。实际上，如果在綫段 A_0B_0 的 $\frac{1}{3}$ 处取一点 M，也就是使 $A_0M=\frac{1}{3}A_0B_0$，那末这就是要找出的一点。事实上，如果取点 A_0 作数軸上計算的起点，取綫段 A_0B_0 作单位，那末点 A_1、A_2、A_3、……A_n 將对应于数值 $\frac{1}{4}$；$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}=\frac{5}{16}$；$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}=\frac{21}{64}$；……；$\frac{1+4+4^2+\cdots+4^{n-1}}{4^n}$。这些分数中每一个都小于 $\frac{1}{3}$。

实际上，如果这些分数中每个分母减去 1，那末分数就增大，并且恰巧等于 $\frac{1}{3}$：

$$\frac{1+4+4^2+\cdots+4^{n-1}}{4^n-1}=\frac{1+4+4^2+\cdots+4^{n-1}}{(4-1)(1+4+4^2+\cdots+4^{n-1})}=\frac{1}{3}\text{①}.$$

另一方面，点 B_1、B_2、B_3、……B_n 对应于数值

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8};\ \frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{32}=\frac{11}{32};\cdots\cdots;$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{32}-\cdots\cdots-\frac{1}{2^{2n+1}}.$$

对应于点 B_n 的数值还可以写成这样的形式：

$$\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\right)-\cdots\cdots-\left(\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{2^{2n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\cdots\cdots-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{2^{2n+1}}.$$

如果把这些数相加，我們就得到：

$$\frac{2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\cdots\cdots-2^3+2^2-2+1}{2^{2n+1}}.$$

从这里不难得到，对应于点 B_1、B_2、……B_n 的每一个数值都大

① 这里我們利用公式：

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$.

于$\frac{1}{3}$. 在这个分数的分母上加 1，我們就使分数縮小而得到：

$$\frac{2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\cdots\cdots-2^3+2^2-2+1}{2^{2n+1}+1}$$

$$=\frac{2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\cdots\cdots-2^3+2^2-2+1}{(2+1)(2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\cdots\cdots-2^3+2^2-2+1)}=\frac{1}{3}\text{①}.$$

因而对应于点 B_1、B_2、B_3、……、B_n、……的所有的数値都大于$\frac{1}{3}$. 从这里得出，对应于数值$\frac{1}{3}$的点 M 是在綫段 A_1B_1，A_2B_2，……，A_nB_n，……的每一綫段內。因此，这也就是由这个綫段序列决定的唯一的一点。

現在我們来証明关于直綫和圓相交的基本定理。

我們記得，一个圓是由圓心和半徑确定的。平面上的点，和圓心的距离小于半徑的，对圓来說叫做內点；和圓心的距离大于半徑的，对圓来說就叫做外点。基本定理是这样表达的：

連結圓的內点和外点的綫段和圓有一个公共点，而且只有一个公共点。

設我們已知一圓，圓心 O，半徑 r（图 30）；A 是一个內点（$OA<r$），B 是一个外点（$OB>r$）。首先我們来証明，如果在 AB 上存在一点 M，它和 O 点的距离等于半徑，那末这样的点只有一个。

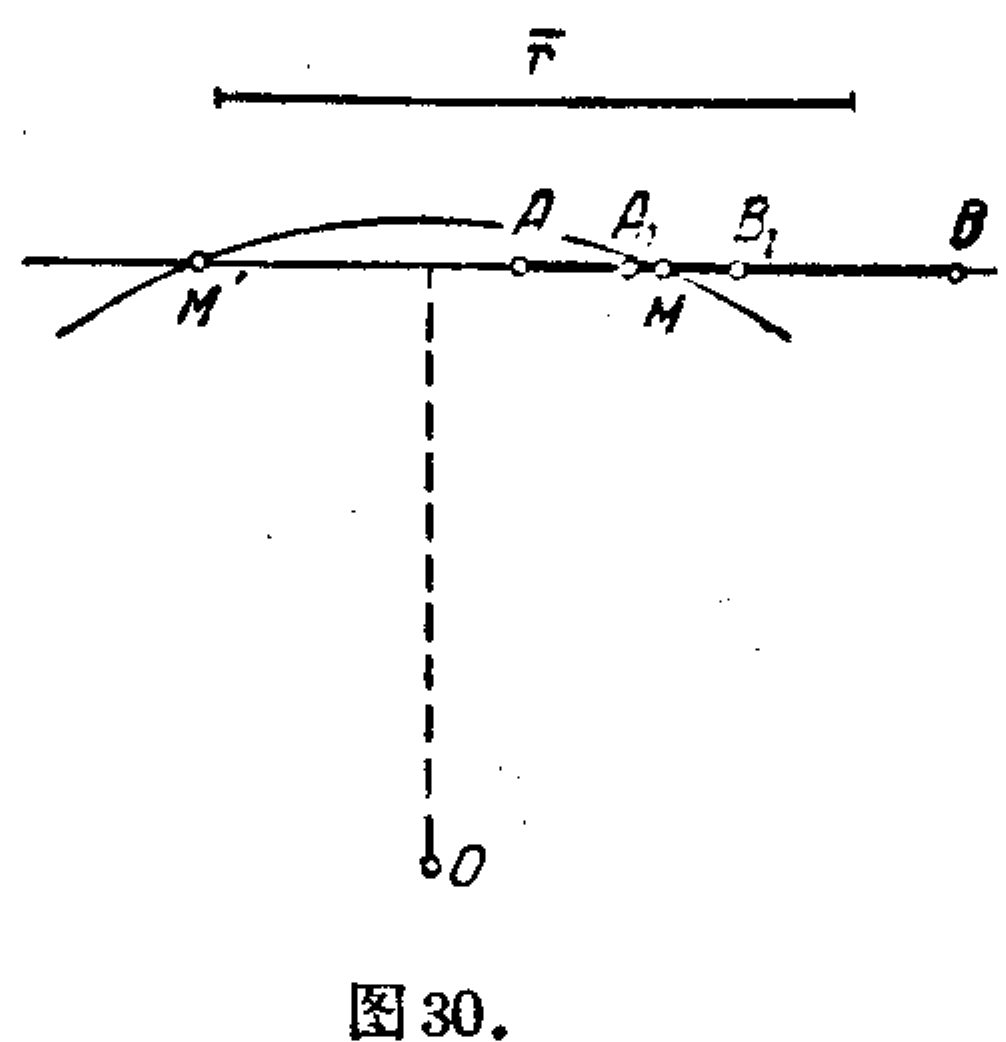


图 30.

① 这里我們利用公式：

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\cdots-ab^{2n-1}+b^{2n}).$$

实际上，如果存在这样的一点 M，那末也存在着一点 M'，它对于从 O 所作直綫 AB 的垂綫来說是和点 M 对称的，而且 $M'O=MO=r$。根据从点 O 引向直綫 AB 的斜綫的性質，綫段 $M'M$ 的全部內点將也是圓的內点，而綫段 $M'M$ 的外点將也是圓的外点。所以点 A 永远应該在点 M' 和 M 之間，而在綫段 AB 上只可能有一点 M。

确定了这点以后，我們把綫段 AB 等分，并且把从得到的中点到圓心的距离和半徑作比較。如果这距离等于半徑，那末定理就証明了。如果这距离小于半徑，那末这一点是內点，我們把它記做 A_1。如果这距离大于半徑，那末这一点是外点，我們把它記做 B_1。

进一步我們取綫段 AB（或 AB_1）的中点，对于它也可能有三种情况：或者是它和圓心的距离等于半徑，这样定理就証明了；或者是这距离小于半徑，那末我們就用字母 A 和相应的号碼来标記这个点；或者是这距离大于半徑，那末我們就用字母 B 和相应的号碼来标記这个点。把这个过程无限繼續下去，我們將得到，或者是这些点里有一点和圓心的距离等于半徑，这样定理就証明了；或者是所有用字母 A_1、A_2、……、A_n、……表示的都是內点，用字母 B_1、B_2、……、B_n、……表示的都是外点。但是在后一种情况，我們將得到一系列滿足康道尔公理条件的綫段，因为每一个后面的綫段都在前一綫段內，而后一个綫段長度比前一个綫段短一半。这就是說，存在着在所有这些綫段內的唯一的一点。因为这一点是在这个綫段上的所有圓的內点和外点之間，所以它既不可能是圓的內点，也

不可能是圓的外点；因而这是圓上的点。

从这条定理特别可以推出：如果一直綫和圓心的距离小于半徑，那末直綫和圓有兩个而且只可能有兩个公共点。实际上，設 O 是圓心，r 是半徑（图 31）。从圓心到直綫 l 的距离 OP 小于半徑；因而，P 是內点。我們在直綫 l 上从点 P 取一綫段 $PQ=r$。

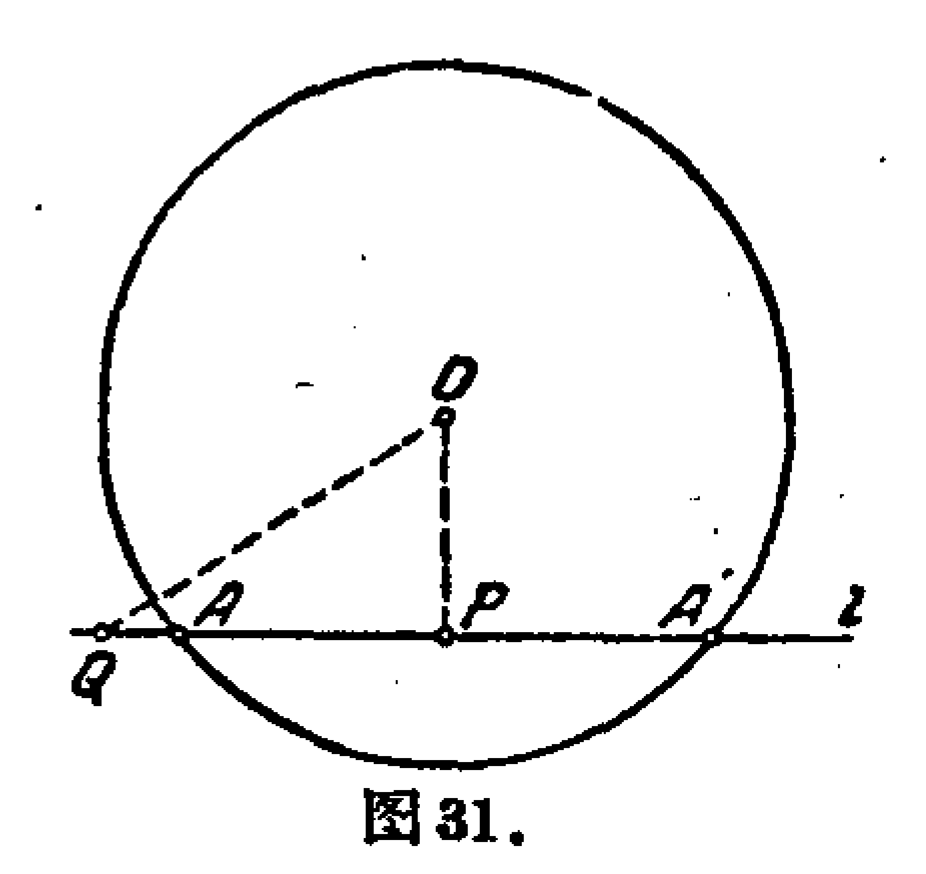


图 31.

因为在直角三角形 OPQ 中，斜边 OQ 大于直角边 $PQ=r$，所以 $OQ>r$，这就是說，Q 是外点。根据已經証明的定理，PQ 和圓有唯一的一个公共点 A。第二个公共点 A' 对于垂綫 OP 和 A 对称。因为綫段 AA' 的所有內点也是圓的內点，而綫段 AA' 的所有外点对圓来說也是外点，所以直綫 l 和圓沒有其他的公共点了。

对于弧段也可以証明和阿基米德公理和康道尔公理类似的命題，这就是說可以証明：

(1)把一已知弧段連續相加足够多次数，我們总能夠得到一个弧段，大于任意預先給定的弧段。

(2)如果有一系列的弧段，其中每一个后面的弧段都在前一个弧段內，并且在这系列內总可以找到比任意給定的弧段小的弧段，那末一定存在一点，它在所有这些弧段內。

根据这些命題，很容易証明关于圓的交点的基本定理：

如果对于一已知圓来說，A 是內点而 B 是外点，那末連結 A 和 B 的任何弧段和已知圓有一个而且只有一个公共点。

这条定理的証明跟关于圓和綫段的交点的定理的証明是完全类似的.

8. 最后一組，也就是第五組几何公理，它和平行的概念有关，总共只有一条公理:

过已知直綫外的一个已知点只能作一条直綫和已知直綫平行.

根据这条公理得到的命題是大家熟悉的，我們就不去討論它們了.

我們研究的一系列公理，提供了关于可以作为几何学基础不用証明的命題的整体的足够的概念. 但是，应該注意，为了設法使叙述尽可能簡化，我們并沒有竭力使这个体系的公理数量最少. 这些公理的数目还可以减少. 例如，阿基米德和康道尔兩条公理可以用一条代替，也就是所謂吉連金特公理. 公理中包含的要求也还可以减弱些. 例如，在巴士公理中可以不要求:和三角形一边相交的直綫还和另一边而且只和一边相交. 原来可以只包含这样的要求:和三角形一边相交的直綫还和三角形的另一边相交，而这样的边只有一条这一点是可以証明的. 在康道尔公理的表达中也正是这样，可以不要求由一系列內函集結綫段所决定的点是唯一的. 这个点的唯一性也可以証明. 但是所有这些都会使叙述困难和冗長.

我們来对本書叙述的全部內容做个总結.

(1)我們肯定了几何学是一門关于物質世界的空間形体的科学.

(2)空間形体的性質的原始知識我們是用归納的方法，也就是多次重复的观察和实驗的方法得到的。

(3)物体的最基本和最普遍的空間性質我們是用一系列基本命題，也就是公理的形式来表达的。

(4)公理体系只是在它滿足完备性、独立性和相容性諸条件时，才正确反映了实际存在的空間性質。

(5)除了公理以外，几何学全部其余的命題——定理——是用演繹的方法，也就是从公理和以前証明了的定理进行推論的方法得到的。推論的系統叫做証明。

(6)为了使証明是正确的，也就是使得被証明的定理的正确性是无可怀疑的，証明必須建立在正确推理的基础上，并且避免錯誤。証明的正确性有賴于：(一) 确切而正确地表达要証明的命題，(二)选擇必不可少而正确的論据，和(三)在証明过程中严格遵守邏輯的規則。